J. H. van Swinden's

Elemente der Geometrie

im Auszuge,

vornehmlich diejenigen Sätze enthaltend,

auf welche

als **Hülfssätze** in:

„Beweise und Auflösungen sämmtlicher Lehrsätze und Aufgaben der Anhänge des Herrn Prof. Jacobi zu den sieben ersten Büchern der Geometrie van Swinden's"

verwiesen ist,

aus dem Holländischen übersetzt

von

de Niem,

Major z. D. und Bezirks-Kommandeur.



Mit 72 Figuren auf 8 Tafeln.

Halle,

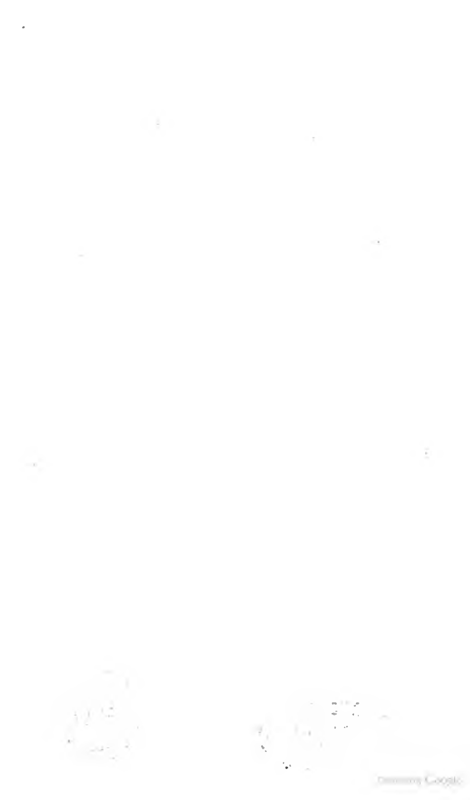
Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1868.









Inhalt.



Aus van Swinden's Elementen der Geometrie.

Aus dem ersten Buche,

handelnd

Von den allgemeinen Eigenschaften gerader Linien u. s. w.

1. Erklärung. Betrachtet man den Raum nur in Bezug auf seine Ausdehnung in die Länge, ohne dass man auf Breite und Dicke Rücksicht nimmt, vielmehr diese beiden letztern Eigenschaften als nicht vorhanden sich denkt, so kommt man zu der Vorstellung einer Linie.

2. Erklärung. Die Grenzen der Linien und ihre Durchschnitte unter einander werden Punkte genannt.

3. Erklärung. Eine gerade Linie ist eine solche, die durchweg eine gleiche Lage zwischen ihren Endpunkten hat.

4. Grundsatz. Gerade Linien, welche zwei Punkte gemein haben, stimmen ganz überein.

5. Grundsatz. Zwei gerade Linien, die von demselben Punkte aus gezogen werden oder sich schneiden, haben nichts gemeinschaftlich, als den Schnittpunkt, welcher beiden Linien zugleich angehört.

6. Grundsatz. Gerade Linien, welche in ihren Endpunkten übereinstimmen, die also ganz übereinstimmen, sind einander gleich; und umgekehrt: Gerade Linien, die gleich sind, decken sich, wenn man ihre Endpunkte aufeinander legt.

7. Forderungssatz. Man fordert, dass es möglich sei, von einem Punkte zu einem andern eine gerade Linie zu ziehen.

8. Forderungssatz. Man fordert, dass es möglich sei, eine gerade Linie beliebig weit zu verlängern, so dass sie entweder gleich einer gegebenen Geraden, oder grösser als dieselbe werde.

9. Forderungssatz. Man fordert, dass man von einer geraden Linie ein Stück abschneiden könne, welches gleich einer andern gegebenen Geraden sei, die kleiner als die erstere ist.

10. Erklärung. Eine krumme Linie ist eine solche, welche eine durchweg ungleiche Lage zwischen ihren Punkten hat.

11. Erklärung. Ein Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer einzigen krummen Linie begrenzt wird; diese Linie heisst Umkreis oder Kreisumfang. Der Umkreis ist so beschaffen, dass alle geraden Linien, welche man von beliebigen Punkten desselben nach einem innerhalb gelegenen Punkte zieht, und in welchem sie also zusammentreffen, gleich sind. Dieser Punkt heisst Mittelpunkt oder Centrum; die genannten gleichen geraden Linien führen den Namen Strahlen oder Radien.

12. Forderungssatz. Man fordert, dass es möglich sei, aus einem bestimmten Punkte als Mittelpunkt mit einem bestimmten Strahl oder Radius einen Kreis zu beschreiben.

13. Grundsatz. Wenn man aus den beiden Endpunkten einer geraden Linie als Mittelpunkten zwei Kreise beschreibt mit Radien, die entweder ebenso gross oder grösser als jene Gerade sind, so schneiden sich die Kreise.

14. Erklärung. Fläche nennt man einen Raumtheil, welchen man nur mit Rücksicht auf die Ausdehnung in die Länge und Breite betrachtet, von der Dicke aber gänzlich absieht.

14. Zusatz. Die Grenzen der Fläche sind Linien, krumme oder gerade.

15. Erklärung. Eine ebene Fläche oder Ebene ist eine solche, welche zwischen ihren Grenzen durchweg dieselbe Lage hat.

16. Erklärung. Die gegenseitige Neigung zweier Linien, die in derselben Ebene liegen und verlängert werden, bis sie sich in einem Punkte schneiden, wird ein ebener Winkel genannt.

16. Anmerkung 3. Man beurtheilt die Gleichheit zweier Winkel aus ihrer Deckung. Sie sind nämlich gleich, wenn, indem man dieselben so aufeinandergelegt, dass Spitze auf Spitze und ein Schenkel des einen längs eines Schenkels des andern zu liegen kommt, der andere Schenkel des erstern mit dem andern Schenkel des letztern zusammenfällt und mithin dieselbe Neigung hat. Findet dies nicht Statt, so ist derjenige Winkel der grössere, dessen zweiter Schenkel ausserhalb der beiden Schenkel des andern Winkels fällt.

17. Erklärung. Wenn eine gerade Linie eine andere dergestalt trifft, dass sie mit ihr am Einfallspunkte gleiche Winkel

bildet, so werden diese Rechte genannt; von der einfallenden Linie selbst sagt man: sie stehe senkrecht auf der andern; man nennt sie Loth oder Perpendikel. Ein Winkel, der grösser als ein Rechter ist, heisst stnmpfer Winkel, und ist er kleiner, spitzer Winkel.

18. Grundsatz. Unter allen Geraden, die sich von einem Punkte nach einer gegebenen Linie ziehen lassen, ist immer eine, die senkrecht auf ihr steht; dasselbe findet Statt bei den Geraden, die von einem Punkte einer gegebenen Linie aus gezogen werden.

19. Lehrsatz. Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Beweis. Man nimmt an, dass die Linie CB (Fig. 1.) die Linie AJ so treffe, dass sie mit ihr gleiche Winkel, $\angle ABC = \angle CBJ$, bildet, welche eben Rechte genannt werden. Dasselbe nimmt man in Betreff der Linien GE und DF an, so dass also $\angle GED = \angle GEF$, welche Winkel gleichfalls Rechte heissen.

Nun denkt man sich den Pnnkt E auf den Punkt B und GE längs CB gelegt, so mnss auch, um zu beweisen, dass der rechte Winkel GEF = dem rechten Winkel CBJ sei, DF längs AJ fallen. Fände dies nicht Statt, sondern fiele DF etwa wie in der Figur angegeben, so wäre:

$$\angle DBC > \angle ABC$$
$$\angle ABC = \angle CBJ$$
folglich $$\angle DBC > \angle CBJ$$
$$\angle DBC = \angle CBF$$
folglich $\angle CBF > \angle CBJ$, was ungereimt ist.

19. Znsatz 1. Da alle rechten Winkel einander gleich und eine bestimmte beständige Grösse haben, so geben sie ein natürliches Maass ab, welches zur Bestimmnng der Grösse aller andern Winkel dienen kann.

20. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie eine andere trifft und dieselbe in einem Pnnkte schneidet, so bildet sie an diesem Punkte entweder zwei rechte Winkel, oder zwei Winkel, welche zusammengenommen gleich sind zweien Rechten.

Vorbereitung. Man errichte auf der gegebenen Linie in dem Punkte, in welchem sie von der einfallenden Geraden getroffen wird, eine Senkrechte.

Beweis folgt aus 17 und der Vorbereitung.

20. Znsatz. Alle Winkel, welche an einem und demselben Punkte und an derselben Seite einer Geraden dnrch beliebig viele

Linien gebildet werden, sind zusammengenommen so gross als zwei Rechte.

21. Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien mit einer dritten dergestalt in einem Punkte zusammentreffen, dass sie mit ihr zwei Winkel bilden, die zusammengenommen gleich sind zweien Rechten, so machen sie stets eine Gerade aus.

Beweis. Man zeigt, dass man in eine Ungereimtheit verfällt, wenn man das Gegentheil annimmt.

22. Lehrsatz. Wenn sich zwei Linien (AB, CE Fig. 2.) in einem Punkte (D) schneiden, so sind die einander gegenüberstehenden Winkel oder Scheitelwinkel (ADE und CDB, ADC und EDB), welche an diesem Punkte gebildet werden, von gleicher Grösse.

Beweis aus 20.

22. Zusatz. Alle Winkel, welche um einen Punkt herum gebildet werden können, betragen zusammen vier Rechte.

24. Erklärung. Von zwei Linien (AD, GE Fig. 3.) sagt man, sie seien parallel oder gleichlaufend, wenn sie gegen eine dritte Linie (CK), die sie schneidet, dieselbe Neigung haben, d. h. an einer und derselben Seite gleiche Winkel mit ihr bilden (nämlich: $\angle$ ABF = $\angle$ GFK, $\angle$ ABC = $\angle$ GFC).

24. Zusatz 1. Eine Gerade, welche eine von zwei parallelen Linien schneidet, schneidet auch, nöthigenfalls verlängert, die andere.

24. Zusatz 2. Durch einen gegebenen Punkt kann man stets mit einer gegebenen Geraden eine Parallele ziehen.

25. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie (CK Fig. 3.) zwei parallele Linien (AD, GE) schneidet, so bildet sie mit ihnen gleiche Wechselwinkel ($\angle$ ABF = $\angle$ BFE und $\angle$ DBF = $\angle$ BFG), und zwei innere, an derselben Seite liegende Winkel ($\angle$ ABF und $\angle$ BFG oder $\angle$ DBF und $\angle$ BFE) sind zusammengenommen gleich zwei Rechten.

Beweis. Der erste Theil aus 22 und 24, der zweite Theil aus 20 und 24.

25. Zusatz. Eine Gerade, welche auf einer von zwei Parallelen senkrecht steht, steht auch (nöthigenfalls verlängert) auf der andern senkrecht.

26. Lehrsatz. Wenn eine Gerade (CK Fig. 3.) zwei andere (AD, GE) dergestalt schneidet, dass die Wechselwinkel ein-

ander gleich sind ($\angle ABF = \angle BFE$ und $\angle DBF = \angle BFG$), oder dass die Summe zweier an derselben Seite liegeuden Winkel ($\angle ABF$ und $\angle BFG$ oder $\angle DBF$ und $\angle BFE$) gleich zwei Rechten ist, so sind die beiden Geraden parallel.

Beweis. Indirekt.

26. Zusatz. Stehen zwei oder mehrere gerade Linien auf einer nnd derselben Geraden senkrecht, so sind sie parallel.

27. Lehrsatz. Weun zwei oder mehrere Linien einer und derselben Linie parallel sind, so sind sie auch untereinander parallel.

Beweis aus 21, Zus. 1 und 24.

28. Lehrsatz. Wenn eine Gerade (CL Fig. 4.) zwei andere (BG nnd JH) so schneidet, dass zwei innere, an derselben Seite liegende Winkel ($\angle GDK$ und $\angle DKH$) zusammengenommen kleiner als zwei Rechte sind, so schneiden sich diese beiden Geraden (nöthigenfalls verlängert) auf eben dieser Seite.

Vorbereitung. Man zieht durch den Punkt D die Gerade $AE \parallel JF$.

Beweis. Aus 25 und 24, Zus. 1.

28. Znsatz 1. Parallele Linien schneiden einander niemals, so weit sie auch verlängert werden mögen.

28. Zusatz 2. Zwei Linien, die einander niemals schneiden, so weit sie auch verlängert werden mögen, sind einander parallel.

28. Zusatz 3. Wenn zwei sich schneidende Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind die inneren Winkel, welche sie mit denselben bilden, zusammen kleiner als zwei Rechte.

29. Lehrsatz. Von allen Linien, die man von einem gegebenen Punkte (C Fig. 5.) nach einer Geraden (DB) ziehen kann, ist das Perpendikel (CD) die kleinste; die übrigen werden um so kleiner, je näher sie am Perpendikel stehen ($CA < CB$); vom gegebenen Punkte aus kann nur eine einzige Senkrechte gezogen werden; die andern Linien bilden mit der gegebenen Geraden auf derselben Seite, auf welcher der gegebene Pnnkt liegt, um so grössere äussere Winkel ($\angle CBG > \angle CAG$), und um so kleinere innere ($\angle CBD < \angle CAD$), je weiter sie von der Senkrechten entfernt sind.

Vorbereitnng. Man ziehe $AE \perp AC$, $AF \perp AC$ und verlängere AD bis sie AF schneidet.

Beweis. Erster Theil indirekt; zweiter Theil aus 28, Zus. 3, 17 und 20; dritter Theil aus 24 und 20.

29. Zusatz 1. Da die Senkrechte die kürzeste Linie ist, hat sie eine bestimmte Grösse und gibt daher das eigentliche Maass ab, um die Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie zu bestimmen.

29. Zusatz 2. Von einem Punkte können nicht mehr als zwei Gerade nach einer geraden Linie gezogen werden, die von gleicher Länge sind; dieselben liegen auf verschiedenen Seiten der Senkrechten, sind gleich weit von ihr entfernt und bilden gleiche Winkel mit ihr.

30. Lehrsatz. Wenn zwei Gerade (AB und CB Fig. 6.) sich in einem Punkte (B) schneiden, so wird die Entfernung der Punkte der einen Linie von der andern um so grösser, je grösser die Entfernung jener Punkte vom Durchschnittspunkte der beiden Geraden ist.

Vorbereitung. Man ziehe aus beliebigen Punkten D, E der einen Linie AB die Perpendikel DF, EG nach der andern CB.

Beweis. Aus 29 und 29, Zus. 1.

31. Lehrsatz. Alle Senkrechten, die zwischen zwei Parallelen gezogen werden können, sind einander gleich.

Beweis. Indirekt aus 28 und 30, indem man annimmt, dass CK nicht gleich BL, sondern etwa NK = BL sei. (Fig. 7.)

32. Lehrsatz. Wenn die Senkrechten (BL, CK Fig. 7.), welche man zwischen zwei Linien (BG, AF) zieht, gleich sind, so sind diese Geraden parallel.

Beweis. Indirekt.

33. Erklärung. Figur ist eine von geraden oder krummen Linien begrenzte Fläche.

34. Erklärung. Geradlinig ist jede Figur, welche durch gerade Linien begrenzt wird.

35. Erklärung. Geradlinige Figuren sind drei-, vier-, fünf- u. s. w. seitig, jenachdem sie von drei, vier, fünf u. s. w. Linien begrenzt werden; meistentheils geschieht jedoch deren Benennung nach der Anzahl ihrer Ecken, indem man sie Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. nennt, jenachdem sie drei, vier, fünf oder mehr Ecken und also auch ebensoviele Seiten haben.

37. Erklärung. Ein Dreieck heisst gleichseitig, wenn alle drei Seiten einander gleich sind, gleichschenkelig, wenn

zwei Seiten gleich, **ungleichseitig**, wenn alle drei Seiten ungleich sind.

38. **Lehrsatz.** In allen Dreiecken (ABC Fig. 8.) ist der Aussenwinkel (BCE), welchen eine der Seiten (BC) mit einer verlängerten zweiten (AC) bildet, gleich der Summe der beiden innern gegenüberstehenden Winkel (∠ BAC und ∠ ABC); und die drei Winkel zusammengenommen sind gleich zwei Rechten.

Vorbereitung. Man ziehe CD ∥ AB.

Beweis. Der erste Theil aus 25 und 24. Der zweite Theil aus dem ersten Theile und 20.

38. **Zusatz 1.** Der Aussenwinkel ist grösser als einer der beiden innern Gegenwinkel.

38. **Zusatz 2.** Wenn die Summe zweier Winkel in einem Dreieck gleich ist der Summe zweier Winkel in einem andern Dreieck, oder wenn diese Winkel einzeln einander gleich sind, so ist auch der dritte Winkel des erstern Dreiecks gleich dem dritten des letztern; und umgekehrt.

38. **Zusatz 3.** Wenn in einem Dreieck ein Winkel ein Rechter ist, so ist die Summe der beiden andern gleich einem Rechten.

38. **Zusatz 4.** Ein Dreieck kann nie mehr als **einen** rechten oder **einen** stumpfen Winkel enthalten.

39. **Erklärung. Rechtwinkelig** wird ein Dreieck genannt, welches einen rechten Winkel hat; **stumpfwinkelig**, wenn es einen stumpfen Winkel hat; **spitzwinkelig**, wenn alle drei Winkel spitz sind. In einem rechtwinkeligen Dreiecke heisst die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite **Hypotenuse**, die beiden andern den rechten Winkel einschliessenden Seiten werden **Katheten** genannt.

40. **Lehrsatz.** Fällt man aus der Spitze eines Dreiecks eine Senkrechte auf die Grundlinie, so fällt dieselbe innerhalb des Dreiecks, wenn die Winkel an der Grundlinie beide spitz sind; ausserhalb, wenn einer dieser Winkel stumpf ist; und ist einer derselben ein Rechter, so fällt die Senkrechte mit einem der Schenkel zusammen.

Beweis. Aus 29 und zwar indirekt.

41. **Lehrsatz.** In jedem Dreiecke liegt dem grössten Winkel die grösste Seite gegenüber. (Fig. 9.)

Beweis. Ist △ ABC in B stumpfwinkelig, und man fällt

AD $\perp$ BC, so ist AD $<$ AB $<$ AC (29). Ebenso ist BC $<$ CD $<$ AC (29), also AC die grösste Seite.

Wenn $\triangle$DAC gegeben und in D rechtwinkelig ist, so ist AC $>$ CD $>$ AD (29).

Wenn das spitzwinkelige $\triangle$EAC gegeben, $\angle$EAC der grösste Winkel in demselben ist, und man zieht EG $\perp$ AC, so ist $\angle$EAG $+$ $\angle$AEG $=$ R (38, Z. 3) $=$ $\angle$GCE $+$ $\angle$GEC, aber

$\angle$EAG $>$ $\angle$GCE (Vorauss.),

folglich $\angle$AEG $<$ $\angle$GEC;

daher muss, wenn FE $=$ AE gemacht wird, der Punkt F zwischen G und C fallen (29, Z. 2), mithin ist EF $<$ EC und folglich auch AE $<$ EC; auf ähnliche Weise zeigt man, dass auch AC $<$ CE.

42. Lehrsatz. In jedem Dreiecke liegt der grössten Seite der grösste Winkel gegenüber.

Beweis. Indirekt mit Hülfe von 29, Zus. 2 und 41.

43. Lehrsatz. In jedem Dreieck sind zwei Seiten zusammen grösser als die dritte.

Vorbereitung. Man fällt ein Höhenperpendikel.

Beweis. Aus 29.

44. Lehrsatz. Wenn man von den Endpunkten (A, C Fig. 10.) einer Seite (AC) eines Dreiecks (ABC) zwei gerade Linien (AD, CD) nach einem innerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte (D) zieht, so sind diese Linien zusammengenommen kleiner, als die beiden übrigen Dreiecksseiten (AB, BC) zusammen; sie bilden jedoch einen grössern Winkel als die letzteren ($\angle$ADC $>$ $\angle$ABC).

Vorbereitung. Man verlängere AD bis F und ziehe BD, die man bis E verlängert.

Beweis. Erster Theil aus 43; zweiter Theil aus 38, Zus. 1.

45. Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke (ABC, DEF Fig. 11.) so beschaffen sind, dass ein Winkel (B) des einen gleich ist einem Winkel (E) des andern, und dass die Schenkel des genannten Winkels des erstern Dreiecks einzeln gleich sind den Schenkeln des genannten Winkels des zweiten Dreiecks (AB $=$ DE und BC $=$ EF), so sind:

1) die dritten Seiten einander gleich (AC $=$ DF),

2) die Winkel, welche in beiden Dreiecken gleichen Seiten gegenüberstehen, ebenfalls einander gleich ($\angle$A $=$ $\angle$D und $\angle$C $=$ $\angle$F).

Beweis. Man denkt sich das eine der Dreiecke, z. B. DEF,

so auf das andere gelegt, dass die Spitzen E und B der gleichen Winkel aufeinander zu liegen kommen und einer der Schenkel, z. B. DE, längs des ihm gleichen BA fällt, und beweist nun mit Hülfe von 16, Anm. 3, dass auch die übrigen Seiten und Winkel beider Dreiecke aufeinander fallen oder sich decken müssen.

45. **Zusatz.** Die Dreiecke selbst, d. h. die Flächenräume, die sie einschliessen, sind auch von gleicher Grösse.

46. **Lehrsatz.** Wenn zwei Dreiecke (ABC, DEF Fig. 11.) so beschaffen sind, dass eine Seite (AC) des einen gleich ist einer Seite (DF) des andern, und dass zwei Winkel des erstern einzeln gleich sind zweien gleichgelegenen Winkeln des letzteren ($\angle$BAC $=$ $\angle$EDF, $\angle$ACB $=$ $\angle$DFE), so sind:

1) die dritten Winkel gleich gross ($\angle$ABC $=$ $\angle$DEF),

2) die übrigen Seiten auch einander gleich, die nämlich, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen (d. i. AB $=$ DE, BC $=$ EF).

Beweis. Erster Theil aus 38, Zus. 2.

Zweiter Theil. Man denkt sich das Dreieck ABC so auf das Dreieck DEF gelegt, dass die Spitze A auf die Spitze D zu liegen kommt und die Seite AC längs der Seite DF fällt; dann muss auch die Spitze C auf die Spitze F fallen, weil AC $=$ DF (Vorauss.), und weil $\angle$ A $=$ $\angle$ D und $\angle$ C $=$ $\angle$ F, so muss AB längs DE und CB längs FE fallen. Nun muss auch B auf E fallen, d. h. AB $=$ DE sein; dies beweist man indirekt, indem man annimmt, dass z. B. AG $=$ DE sei, wobei man auf eine Ungereimtheit stösst, welche im Widerspruch steht mit 25.

46. **Zusatz.** Die Flächenräume beider Dreiecke sind auch gleich.

47. **Lehrsatz.** Wenn in zwei Dreiecken (ABC, DEF Fig. 12.) zwei Seiten (AB, BC) des einen einzeln gleich sind zweien Seiten (DE, EF) des andern, jedoch einen grössern Winkel einschliessen ($\angle$ABC $>$ $\angle$DEF), so ist die dritte Seite (AC) des erstern Dreiecks grösser als die dritte Seite (DF) des letztern.

Beweis. Man lege $\triangle$ DEF so auf $\triangle$ ABC, dass die Ecke E auf die Ecke B und die Seite DE längs der Seite AB zu liegen kommt, dann muss die Ecke D mit der Ecke A zusammenfallen, und der Schenkel EF muss zwischen die Schenkel AB und BC fallen (16, Anm. 3). Nun kann die Ecke F entweder auf AC, oder oberhalb, oder unterhalb AC zu liegen kommen. Im ersten

Falle bedarf es weiter keinen Beweises, dass DF < AC; im zweiten Falle wendet man Satz 44, im dritten Falle Satz 43 an.

47. Anmerkung. Der 47ste Satz lasst sich umkehren; der Beweis der Umkehrung wird indirekt geführt, wobei ein Mal Satz 47, das andere Mal Satz 45 in Anwendung kommt.

49. Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken (ABC, DEF Fig. 13.) zwei Seiten des einen (AB, AC) einzeln gleich sind zweien Seiten (DE, DF) des andern, und der einer dieser beiden Seiten des ersten Dreiecks gegenüberliegende Winkel (ABC) gleich ist dem der entsprechenden Seite des andern Dreiecks gegenüberliegenden (DEF), so sind die beiden Dreiecke in jeder Beziehung gleich, d. h. congruent, wenn die den beiden andern gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel (ACB, DFE) beide entweder stumpf oder spitz sind.

Beweis. Man lege △DEF so auf △ABC, dass die Ecke D auf die Ecke A und DE auf AB zu liegen kommt, dann muss auch E auf B fallen und EF längs BC (16, Anm. 3). Fällt nun die Ecke F nicht mit C zusammen, so fällt sie entweder zwischen B und C oder ausserhalb des Dreiecks ABC. Fällt man das Perpendikel AG, so liegen sowohl AC als auch AF auf derselben Seite desselben, weil beide Winkel, ACB und AFB oder DEF entweder spitz oder stumpf sind (40); da aber AC = AF = DF, so würde es im Widerspruch mit 29, Zus. 2 stehen; daher muss der Punkt F mit dem Punkte C zusammenfallen u. s. w.

49. Anmerkung 2. Alle rechtwinkeligen Dreiecke, sowie auch alle stumpfwinkeligen, in denen die stumpfen Winkel einander gleich, sind congruent, wenn zwei Seiten, welche einen der spitzen Winkel einschliessen, einzeln gleich sind.

50. Lehrsatz. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einzeln gleich sind den drei Seiten eines andern Dreiecks, so sind auch die gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich.

Beweis. Indirekt, indem man zeigt, dass man mit Satz 47 in Widerspruch geräth, wenn man die Ungleichheit zweier entsprechenden Winkel annimmt

50. Zusatz 1. Die beiden Dreiecke sind einander gleich, d. h. die Flächenräume, die sie umfassen, sind gleich gross.

50. Zusatz 2. Wenn man aus zwei Punkten (A, C Fig. 14.) einer Geraden (AC) zwei Linien (AB, CB) zieht, die sich in (B) schneiden, so lassen sich aus denselben Punkten (A, C) und nach derselben Seite hin nicht zwei andere Linien ziehen, welche einzeln

den zuerst gezogenen gleich sind (also AG = AB, GC = BC) und sich in einem andern Punkte (G) schneiden.

51. Lehrsatz. In einem gleichschenkeligen Dreieck (ABC Fig. 15 u. 16.) sind stets die Winkel über der Grundlinie einander gleich, und ebenso bei Verlängerung der Schenkel die Winkel unter der Gruudlinie.

Erster Beweis. Man halbirt (Fig. 15.) durch BD den Winkel an der Spitze und wendet Satz 45 auf die Dreiecke BAD und BCD an.

Zweiter Beweis. Man verlängert die Schenkel (Fig. 16.), macht BE = BF und zieht CE und AF; alsdann ist durch Anwendung von Satz 45 auf die Dreiecke BAF und BCE: AF = CE und mithin nach Satz 50 in Betreff der Dreiecke ACF und ACE: $\angle ACF = \angle CAF$.

51. Zusatz 2. In einem gleichschenkeligen Dreiecke kann nur der Winkel an der Spitze ein rechter sein.

51. Zusatz 3. Ein gleichseitiges Dreieck ist stets auch gleichwinkelig, und jeder Winkel beträgt zwei Drittheile eines Rechten.

51. Zusatz 4. Eine Senkrechte, aus der Spitze eines gleichschenkeligen oder gleichseitigen Dreiecks auf die Grundlinie gefällt, halbirt sowohl die Grundlinie, als auch den Winkel an der Spitze.

51. Zusatz 5. Wenn auf derselben Grundlinie (AC Fig. 17) zwei verschiedene gleichschenkelige Dreiecke (ABC und AGC) stehen, so halbirt die Gerade (BG), welche, nöthigenfalls verlängert, die Spitzen (B, G) der beiden Dreiecke verbindet, die Grundlinie und steht senkrecht auf derselben.

51. Zusatz 6. Wenn man von der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks aus auf dessen Schenkeln oder deren Verlängerungen gleiche Stücke abschneidet und die Endpunkte derselben durch eine gerade Linie verbindet, so erhält man ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Winkel einzeln denen des gegebenen gleich sind, und dessen Grundlinie parallel ist der Grundlinie jenes.

52. Lehrsatz. Sind in einem Dreieck (ABC Fig. 15 u. 16.) die Winkel über der Grundlinie gleich, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

Erster Beweis. Fig. 15. Man fälle das Höhenperpendikel BD auf die Grundlinie und folgert die Gleichheit der in Rede ste-

henden Seiten aus Satz 46, angewandt auf die Dreiecke BAD und BCD.

Zweiter Beweis. Fig. 16. Man verlängere AB und AC, mache AE = CF und ziehe AF und CE. Nun ist $\angle$BAC = $\angle$BCA (Vorauss.), daher (20) $\angle$EAC = $\angle$FCA, mithin (45) $\angle$AEC = $\angle$AFC und CE = AF, folglich (46) AB = BC.

52. Zusatz. Ein gleichwinkeliges Dreieck ist auch stets gleichseitig.

53. Lehrsatz. Wenn man von einem der Endpunkte (C Fig. 18.) der Grundlinie (AC) eines gleichschenkeligen Dreiecks (GAC) eine Gerade (CD) nach der nöthigenfalls verlängerten Gegenseite zieht, welche gleich dem Schenkel ist, so ist der Winkel (DCE), welchen dieselbe mit der verlängerten Grundlinie bildet, dreimal so gross, als der Winkel über der Grundlinie.

Beweis. Aus 38 und 51.

54. Lehrsatz. Sind zwei Linien (AB, CD Fig. 19.) gleich und parallel, so sind auch die Linien (AC, BD), welche ihre Endpunkte verbinden, gleich und parallel.

Vorbereitung. Man ziehe BC.

Beweis. Aus 25 und 45.

55. Erklärung. Ein Viereck (ABCD Fig. 19.) führt den Namen Parallelogramm, wenn die Gegenseiten (AB und CD, AC und BD) parallel sind; die Linie (CD), welche von einer der Ecken nach der ihr gegenüberliegenden gezogen wird, heisst Diagonale.

56. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm (ABDC Fig. 19.) sind die Gegenseiten (AB und CD, AC und BD) gleich; dasselbe gilt von den gegenüberliegenden Winkeln (ABD und ACD, BAC und BDC), und das ganze Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweis. Aus 25 und 45, auf die Dreiecke ABC und BCD angewandt.

56. Zusatz 1. Ein Dreieck (CBD) ist die Hälfte eines Parallelogramms (ABDC), das mit ihm auf derselben Grundlinie (CD) und zwischen denselben Parallelen dergestalt steht, dass beide einen Winkel (D) gemeinschaftlich haben.

56. Zusatz 2. Sind zwei aneinander liegende Seiten eines Parallelogramms gleich, so sind alle vier gleich; ist ein Winkel ein Rechter, so sind alle vier Winkel Rechte.

57. Erklärung. Ein Viereck führt den Namen Raute (Rhombus), wenn alle vier Seiten zwar einander gleich, doch die Winkel keine Rechte sind.

57. Zusatz. In jeder Raute sind die Gegenseiten parallel.

58. Erklärung. Ein Parallelogramm führt den Namen Rechteck, wenn seine Winkel Rechte sind.

59. Erklärung. Ein Viereck heisst Quadrat, wenn die vier Seiten einander gleich und die vier Winkel Rechte sind.

59. Zusatz 2. Eine vierseitige Figur, in welcher die Seiten und Winkel ungleich sind, wird Trapezium genannt.

60. Lehrsatz. In allen Vierecken (ABDC Fig. 19.), in denen die Gegenseiten gleich sind, sind sie auch parallel, und die gegenüberliegenden Winkel sind gleich.

Vorbereitung. Man ziehe die Diagonale BC.

Beweis. Aus 50, angewandt auf die Dreiecke ABC und CDB, und aus 26.

61. Lehrsatz. Die beiden Diagonalen (BC, AD Fig. 19.) eines Parallelogramms halbiren sich gegenseitig.

Beweis. Aus 46.

61. Zusatz. In jedem Rechteck sind die beiden Diagonalen gleich; in jeder Raute und in jedem Quadrat schneiden sich die Diagonalen unter rechten Winkeln.

63. Lehrsatz. Nimmt man auf einer der Seiten (AD Fig. 20.) eines Dreiecks (ADE) drei Punkte (J, B, F) so, dass die zwischen ihnen enthaltenen Stücke (JB, BF) von gleicher Grösse sind, und zieht durch sie drei einander parallele Geraden (JN, BC, FL) nach einer zweiten Seite (AC), so sind auch die beiden zwischen den Parallelen enthaltenen Stücke (NC, CL) der zweiten Seite gleich; und umgekehrt: Schneiden zwei parallele Linien (BC, FL) zwei Seiten (AD, AC) eines Dreiecks, und eine dritte Gerade (JN) schneidet auf der einen Seite (AD) ein Stück (JB) ab, welches gleich ist dem auf eben dieser Seite zwischen den Parallelen enthaltenen Stücke (BF), und auf der andern Seite (AE) ein Stück (NC) gleich dem auf dieser zweiten zwischen den Parallelen enthaltenen (CL), so ist die dritte Gerade parallel den beiden ersten.

Vorbereitung. Man ziehe durch C eine Parallele mit AD, welche FL in O und die verlängerte JN in P schneidet.

Beweis. $PC = CO$ wird bewiesen aus 56 und alsdann mit

Hülfe von 22 und 46: NC = CL. Die Umkehrung beweist man indirekt mit Hülfe des ersten Theiles.

63. Zusatz. Wenn man eine Seite eines Dreiecks in beliebig viele, aber gleiche Theile theilt und aus den Theilpunkten mit einer zweiten Seite Parallelen nach der dritten zieht, so wird diese durch die Parallelen in die gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt.

64. Lehrsatz. Wenn man die vier Seiten eines Vierecks (ABCD Fig. 21.) halbirt, so bilden die Geraden, welche die Halbirungspunkte verbinden, ein Parallelogramm (EFGH).

Vorbereitung. Man zieht die Diagonalen AC und BD.

Beweis. Man beweist nach 63, dass HG und EF ‖ AC und HE und GF ‖ BD und wendet alsdann Satz 27 und 55 an.

Aus dem zweiten Buche,

handelnd

Von dem Inhalte geradliniger Figuren.

65. Erklärung. Der Inhalt einer Figur ist der Raum zwischen den Linien, aus welchen sie besteht.

66. Erklärung. Von zwei Figuren sagt man, sie seien gleich, wenn der Inhalt der einen gleich dem der andern ist, oder, was dasselbe, wenn ihre Flächenräume gleich sind.

67. Erklärung. Höhe einer Figur ist die Senkrechte, die aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird.

67. Zusatz. Ist die Figur so beschaffen, dass der Grundlinie gegenüber eine mit dieser parallele Seite (also keine Spitze) sich befindet, so ist die Höhe die zwischen der Grundlinie und der Parallele gezogene Senkrechte.

68. Zusatz. Zwei Figuren, die zwischen denselben Parallelen stehen, haben gleiche Höhe.

69. Erklärung. Von einem Rechtecke sagt man, es sei das Rechteck zweier (aneinander grenzender) Linien, wenn seine Grundlinie gleich der einen und seine Höhe gleich der andern Linie ist.

69. Zusatz 1. Alle Rechtecke aus gleichen Linien sind gleich.

69. Zusatz 2. Das über eine Linie gestellte Quadrat (NG Fig. 22.) ist ein Rechteck aus zwei gleichen Linien (GJ, GE).

72. **Lehrsatz.** Die Summe verschiedener Rechtecke (LJ, QH, PG Fig. 22.), welche dieselbe Höhe, jedoch verschiedene Grundlinien haben, ist gleich einem Rechteck (LG), dessen Höhe dieselbe und dessen Grundlinie gleich der Summe aller gegebenen Grundlinien ist.

Beweis. $LK_r KG = LK_r (KJ + JH + HG) = LK_r KJ + LK_r JH + LK_r HG$ u. s. w.

72. **Zusatz 1.** Daher ist das Quadrat (AG Fig. 22.) einer Linie (GK) gleich der Summe der Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem ihrer Abschnitte (KJ, HJ, GH).

72. **Zusatz 2.** Wenn eine Linie in zwei Stücke getheilt ist, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und einem der Stücke gleich dem Quadrat von eben diesem Stücke und dem Rechteck aus beiden Stücken zusammengenommen, also (Fig. 22.) $GK_r KJ = KJ_q + KJ_r GJ$.

72. **Zusatz 3.** Ein Rechteck ist in Betreff seines Flächenraums die Hälfte eines andern, wenn in beiden die Grundlinien gleich sind, aber die Höhe des erstern halb so gross ist als die Höhe des letztern, oder wenn, bei gleichen Höhen, die Grundlinie des erstern die Hälfte von der Grundlinie des letztern ist.

72. Anmerkung. Der Flächenraum eines Rechtecks ist derselbe aliquote Theil vom Flächenraum eines andern, welcher aliquote Theil, wenn die Grundlinien gleich sind, die Höhe des einen von der Höhe des andern, oder, bei gleichen Höhen, die Grundlinie des einen von der Grundlinie des andern ist.

73. **Lehrsatz.** Der Unterschied zweier Rechtecke (LH, PG Fig. 22.), welche dieselbe Höhe, jedoch verschiedene Grundlinien haben, ist gleich einem Rechteck (LJ), dessen Höhe dieselbe und dessen Grundlinie gleich dem Unterschiede der gegebenen Grundlinien ist ($KJ = KH - HJ = KH - HG$).

Beweis. Einfach.

74. **Lehrsatz.** Wenn eine gerade Linie (GE Fig. 23.) in zwei beliebige Theile (GF, FE), gleiche oder ungleiche, getheilt wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie (AE) gleich der Summe der Quadrate der beiden Theile (AJ, JE) und des doppelten Rechtecks (JG und JC) aus eben diesen Theilen.

Beweis. Aus 72.

74. **Zusatz 1.** Wird eine gerade Linie in zwei gleiche Theile getheilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie das Vierfache vom Quadrat eines der Theile.

74. Zusatz 2. Wird eine gerade Linie in zwei beliebige Theile getheilt, so ist das Quadrat eines der Theile gleich dem Unterschiede zwischen dem Quadrat der ganzen Linie und zwischen der Summe des Quadrats des andern Theiles und des doppelten Rechtecks aus beiden Theilen.

74. Anmerkung 4. Der vorstehende Lehrsatz kann viel allgemeiner auf folgende Weise ausgedrückt werden: Wird eine Linie in beliebig viele Theile getheilt, so ist das Quadrat der ganzen Linie so gross als die Summe der Quadrate aller Theile und die doppelte Summe der Rechtecke aus je zweien der Theile zusammengenommen.

75. Lehrsatz. Wird eine gerade Linie (GE Fig 23.) in zwei Theile (GF, FE) getheilt, so sind die Quadrate der ganzen Linie (GE_q) und eines der Theile (FE_q) zusammen so gross als das doppelte Rechteck aus eben diesem Theile und der ganzen Linie ($2FE_rGE$) vermehrt um das Quadrat des andern Theiles (GF_q).

Beweis.
$$GE_q = GF_q + FE_q + 2GF_rFE \quad (74)$$
$$GE_q + FE_q = GF_q + 2FE_q + 2GF_rFE$$
$$= GF_q + 2FE_r(FE + GF) \quad (72)$$
$$= GF_q + 2FE_rGE.$$

76. Lehrsatz. Wird eine gerade Linie (KG Fig. 22.) in zwei gleiche Theile ($KJ = JG$) und auch in zwei ungleiche Theile (KH, HG) getheilt, so sind das Rechteck aus den ungleichen Theilen (KH_rHG) und das Quadrat des zwischen den Theilpunkten enthaltenen Stückes (JH_q) zusammen so gross als das Quadrat der halben Linie (KJ_q).

Beweis. Aus 72 und 72, Zus. 1.

77. Lehrsatz. Wenn man eine gerade Linie (AC Fig. 22.) in zwei beliebige Stücke (AB, BC) theilt und um die Länge eines derselben (BC) verlängert (so dass also $BC = CD$), so ist das Quadrat (AP) über der gegebenen Linie so gross als das Quadrat (CE) über der Verlängerung und das Rechteck (AE) aus dieser letzteren und der ganzen verlängerten Linie (AD) zusammengenommen.

Beweis. Aus 72.

78. Lehrsatz. Wenn eine Gerade (AC Fig. 22.) in zwei beliebige Stücke (AB, BC) getheilt und um die Länge eines derselben (BC) verlängert wird, so ist das Quadrat (AG) über der ganzen verlängerten Linie (AD) so gross als das vierfache Rechteck aus der gegebenen Geraden (AC) und ihrer Verlängerung (CD)

und das Quadrat (AN) über dem andern Abschnitte (AB) zusammengenommen

Beweis. Aus 69, Zus. 1 und 72.

79. Lehrsatz Wird eine gerade Linie in zwei gleiche (KJ, GJ Fig. 22.) und in zwei ungleiche Theile (KH, GH) getheilt, so ist die Summe der Quadrate der ungleichen Theile gleich der doppelten Summe der Quadrate der halben Linie und des mittelsten Stückes der durch die beiden Theilpunkte entstandenen drei Stücke (nämlich: $KH_q + HG_q = 2GJ_q + 2HJ_q$).

Beweis. Aus 72, 72, Zus. 1, 74, Zus. 2.

80. Lehrsatz. Theilt man eine Gerade (JG Fig. 22.) in zwei gleiche Theile und verlängert sie alsdann beliebig weit (etwa bis K), so ist das Quadrat der ganzen so erhaltenen Linie (GK), vermehrt um das Quadrat ihrer Verlängerung (KJ) doppelt so gross als die Summe der Quadrate von der Hälfte (GH) der gegebenen Linie und der Linie (KH), welche man aus der Hälfte und der Verlängerung bildet [(also: $GK_q + KJ_q = 2(KH_q + GH_q)$].

Beweis. Aus 69, Zus. 1 und 72.

81. Lehrsatz. Der Unterschied der Quadrate (HC und CJ Fig. 24.) zweier ungleichen Linien (AC, BC) ist gleich dem Rechteck (HE) aus der Summe (AD oder LE) und dem Unterschiede (AB oder FE) der beiden Linien.

Vorbereitung. Man verlängere AC bis D, so dass CD = BC; ziehe durch D: DF ∥ HA; verlängere HG bis F, KJ bis E und L.

Beweis. Aus 69, Zus. 1, 72 und 74.

81. Zusatz 1. Das Quadrat (MJ Fig. 22.) über der Hälfte (KJ) einer Linie (KG) ist stets grösser als das Rechteck (LH) aus zwei ungleichen Stücken (KH, GH), welche zusammen die ganze Linie (GK) ausmachen.

82. Lehrsatz. Parallelogramme (BL, DL Fig. 25.), welche auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallelen stehen und mithin gleiche Höhe haben, haben gleichen Flächeninhalt oder sind gleich.

Beweis. Aus 56 und 45, Zus. in Betreff der Dreiecke MBD und LCE; alsdann subtrahirt man $\triangle$CKD und addirt $\triangle$MKL etc.

82. Zusatz 1. Ein Parallelogramm (MC Fig. 25.) ist gleich einem Rechteck (OL), welches auf derselben Grundlinie (ML) oder

auf gleicher Grundlinie steht, und dessen zweite Seite (MO) gleich der Höhe (MO oder PL) des Parallelogramms ist; daher sind Rechtecke das eigentliche Maass für Parallelogramme.

82. Zusatz 2. Ein Parallelogramm ist stets das Doppelte von einem Dreieck, welches mit ihm dieselbe Grundlinie und Höhe hat oder zwischen denselben Parallelen steht.

83. Lehrsatz. Parallelogramme, welche auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen stehen, mithin gleich hoch sind, sind gleich (BL = DH Fig. 25.).

Beweis. Aus 54 und 82.

84. Lehrsatz. Dreiecke (ADJ, AEJ, HKL Fig. 26.), welche auf derselben oder auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallelen stehen, also gleiche Höhe haben, sind gleich.

Vorbereitung. Man vollende die Parallelogramme BJ, CJ, GL.

Beweis. Aus 82 und 56, Zus. 1.

84. Anmerkung 1. Zwei Dreiecke, welche auf derselben oder auf gleichen Grundlinien stehen, und zwar auf einerlei Seite von diesen, und gleich sind, stehen zwischen denselben Parallelen.

84. Zusatz 1. Der Inhalt eines Dreiecks ist die Hälfte vom Inhalt eines Rechtecks, welches auf derselben Grundlinie steht und dieselbe Höhe hat, und mithin ist der Inhalt eines Dreiecks gleich einem Rechteck, welches auf derselben Grundlinie steht, dessen Höhe aber halb so gross als die des Dreiecks ist, oder welches dieselbe Höhe und eine doppelt so grosse Grundlinie als das Dreieck hat; so dass die Rechtecke das eigentliche Maass für Dreiecke, wie für Parallelogramme sind.

84. Zusatz 2. Wenn zwei Dreiecke gleiche Höhe, aber verschiedene Grundlinien haben, oder gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhen, so ist dasjenige das grössere, welches im ersteren Falle die grössere Grundlinie und im letzteren Falle die grössere Höhe hat.

84. Zusatz 3. Ein Dreieck ist in Bezug auf seinen Flächeninhalt der sovielte Theil von dem Flächeninhalte eines andern Dreiecks, der wievielte Theil des erstern Grundlinie von der Grundlinie des letztern ist, wenn beide gleiche Höhe, oder der wievielte Theil des erstern Höhe von der Höhe des letztern ist, wenn beide gleiche Grundlinien haben.

85. Lehrsatz. Nimmt man auf einer Diagonale (BC

Fig. 27.) eines Parallelogramms (ABDC) einen Punkt (G) und zieht durch denselben zwei Gerade (HGE, FGJ) parallel mit den Seiten, so entstehen vier Parallelogramme; von denen die beiden (AG, DG), durch welche die Diagonale nicht geht, und welche Ergänzungen genannt werden, gleichflächig sind.

Beweis. Aus 56.

87. Lehrsatz. In allen rechtwinkeligen Dreiecken ist das Quadrat der Hypotenuse (DB) gleich der Summe der Quadrate der Katheten (BG und CJ). Fig. 28.

Vorbereitung. Man ziehe aus der Spitze des rechten Winkels CK ∥ AD ∥ BE; ziehe CE, CD, AF und BJ.

Beweis. Aus 45 in Bezug auf die Dreiecke ACD und AJB, sowie ABF und EBC; alsdann aus 84, Zus. 1 in Bezug des Flächenraums der genannten Dreiecke, der Rechtecke AD,DK, BE,KE und der Quadrate BG und AH.

87. Zusatz 1. Das Quadrat einer Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem Stück von ihr, welches zwischen dem Fusspunkte des aus der Spitze des rechten Winkels auf sie gefällten Perpendikels und der genannten Kathete enthalten ist.

87. Zusatz 2. In allen rechtwinkeligen Dreiecken ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Unterschiede zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem Quadrate der andern Kathete.

87. Zusatz 3. Fällt man in einem rechtwinkeligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels das Höhenperpendikel (CD Fig. 29.) auf die Hypotenuse, so ist das Rechteck aus der ganzen Hypotenuse und einem (AD) ihrer durch das Höhenperpendikel gebildeten Segmente gleich dem Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede der Hypotenuse und derjenigen Kathete (BC), welche an dem andern Hypotenusensegment (BD) anliegt.

87. Zusatz 4. Wenn zwei rechtwinkelige Dreiecke dieselbe Höhe haben, so sind:

1) die Summen von den Quadraten der Hypotenuse des einen und der Grundlinie des andern gleich,

2) die Unterschiede zwischen den Quadraten der Hypotenusen und zwischen den Quadraten der Grundlinien ebenfalls gleich.

87. Zusatz 5. In jedem Dreiecke (ABC Fig. 29 und 30) ist der Unterschied der Quadrate zweier Seiten (BC, AC) gleich dem Unterschiede der Quadrate derjenigen Segmente (DB, AD) der

dritten Seite (AB), welche durch das aus der Gegenecke auf sie gefällte Perpendikel (CD) gebildet werden.

88. **Lehrsatz.** Wenn in einem Dreiecke (ADB Fig. 15.) die Quadrate zweier Seiten (AD, BD) zusammengenommen so gross sind, als das Quadrat der dritten (AB), so ist das Dreieck rechtwinkelig, und zwar liegt der rechte Winkel der dritten Seite gegenüber.

Vorbereitung. Man errichte in dem gemeinschaftlichen Endpunkte D der beiden Seiten auf einer derselben, BD, eine Senkrechte CD = AD = der andern und ziehe BC.

Beweis. Aus 87 und 50.

89. **Lehrsatz.** Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte fällt, so ist das Quadrat dieser letzteren gleich dem Rechteck aus den beiden Stücken, in welche die Hypotenuse durch die Senkrechte getheilt wird; und umgekehrt: Wenn das Quadrat der aus der Spitze eines der Winkel eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gefällten Senkrechten gleich ist dem Rechteck aus den beiden Stücken, in welche diese Seite durch die Senkrechte getheilt wird, so ist der genannte Winkel ein Rechter.

Beweis. Aus 87, Zus. 2. 87, Zus. 1. 73. Die Umkehrung indirekt aus dem ersten Theile.

89. **Zusatz.** Verbindet man in einem rechtwinkeligen Dreieck die Spitze des rechten Winkels mit dem Halbirungspunkte der Hypotenuse durch eine gerade Linie, so ist diese gleich der halben Hypotenuse; und umgekehrt: Ist die Gerade, welche man aus einer Spitze eines Dreiecks nach dem Halbirungspunkte der Gegenseite zieht, gleich der Hälfte dieser letzteren, so ist der Winkel, von welchem die Gerade ausläuft, ein Rechter.

Beweis. Aus 87, Zus. 2. 89. 81. Die Umkehrung aus 76.

90. **Lehrsatz.** In allen Dreiecken ist das Quadrat einer Seite (BC Fig. 31.) grösser oder kleiner als die Summe der Quadrate der beiden andern, jenachdem der Winkel (BAC), welcher der erstgenannten Seite gegenüberliegt, ein stumpfer oder spitzer ist: der Unterschied ist gleich dem doppelten Rechteck aus einer (AB) der beiden letztern Seiten und dem Stück (AD) von ihr, welches zwischen der Spitze des genannten Winkels und dem aus der ihr gegenüberliegenden Ecke auf sie gefällten Perpendikel enthalten ist.

Beweis. Aus 87 nimmt man den Werth von BC_q in $\triangle BCD$; alsdann aus 87, Zus. 2 den Werth von CD_q in $\triangle CDA$; und endlich aus 74, Zus. 2 den Werth vom Unterschiede der Quadrate über BD und AB.

92. **Lehrsatz.** Wenn man aus zwei Winkelspitzen (C und A Fig. 31.) eines Dreiecks (ABC) Senkrechte (CD, AE) auf die gegenüberliegenden Seiten fällt, so sind die Rechtecke, aus jeder dieser Seiten und dem zwischen ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte (B) und dem auf sie gefällten Perpendikel enthaltenen Abschnitte gebildet, gleich ($AB_r BD = BC_r BE$).

Beweis. Aus 90.

93. **Lehrsatz.** Zieht man aus der Spitze (C Fig. 31.) eines Dreiecks nach der gegenüberliegenden Seite eine Gerade (CF), welche diese Seite halbirt, so sind das doppelte Quadrat jener Geraden und das doppelte Quadrat von der Hälfte der genannten Seite zusammen so gross als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten.

Beweis. Aus 90.

94. **Lehrsatz.** In allen Parallelogrammen (ABDC Fig. 19.) ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

Vorbereitung. Fälle die Perpendikel AF, BG.

Beweis. DG = CF (46); alsdann wird Satz 90 angewandt auf $\triangle\triangle$ ACD und BCD etc.

97. **Lehrsatz.** Ist eine Gerade (AB Fig. 32.) in zwei solche Stücke getheilt, dass das Quadrat des grössern (AC) gleich ist dem Rechteck aus dem kleinern (BC) und der ganzen Linie; und man beschreibt aus dem Theilpunkt (C) als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Halbmesser gleich dem grössern Stück AC; darauf aus dem andern Endpunkte (A) dieses Stückes als Mittelpunkte einen zweiten Kreis mit einem Halbmesser gleich der gegebenen Geraden AB, verbindet den Durchschnittspunkt (D) der beiden Kreise mit den Endpunkten (A und B) und mit dem Theilpunkte (C) der gegebenen Linie durch gerade Linien (DA, DB, DC), so erhält man zwei gleichschenkelige Dreiecke, in welchen beiden der Winkel über der Grundlinie doppelt so gross ist, als der Winkel an der Spitze; die Schenkel des grössern (BAD) sind gleich der gegebenen Linie; die Schenkel des kleineren (CDB) gleich dem grössern Stücke (AC) derselben.

Vorbereitung. Ziehe DE $\perp$ AB.

Beweis. Aus 90, 74 und 51 Zus. 4.

97. **Zusatz 1.** Aus dem Hauptsatze folgt, dass $\angle$ BDC = $\angle$ CDA oder dass $\angle$ BDA durch die Linie DC halbirt wird.

97. **Zusatz 2.** Ferner folgt: dass, wenn in einem gleichschenkeligen Dreieck jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so gross ist als der Winkel an der Spitze, die Gerade (CD), welche einen jener Winkel an der Grundlinie halbirt, dessen Gegenschenkel dergestalt schneidet, dass

1) das Quadrat des grössern Stückes gleich dem Rechteck aus dem kleinern Stück und dem ganzen Schenkel und
2) das grössere Stück gleich der Grundlinie des Dreiecks ist.

97. **Zusatz 4.** Aus dem Hauptsatze geht hervor, dass die Construction eines gleichschenkeligen Dreiecks, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so gross als der Winkel an der Spitze ist, davon abhängt, eine Gerade so zu theilen, dass das Quadrat des grössern Stücks gleich sei dem Rechteck aus der ganzen Linie und ihrem kleinern Abschnitt.

98. **Lehrsatz.** Wenn ein gleichschenkeliges Dreieck so beschaffen ist, dass jeder Winkel (ABD, BDA Fig. 32.) an der Grundlinie doppelt so gross ist, als der Winkel an der Spitze (A), und man zieht aus einem der Scheitel (D) der erstern Winkel nach dem Gegenschenkel (AB) eine Gerade (DC) gleich der Grundlinie (BD), so wird durch diese Gerade der Gegenschenkel in zwei solche Stücke getheilt, dass

1) das zwischen der Spitze des Dreiecks und dem Theilpunkte enthaltene gleich der Grundlinie,
2) das Quadrat eben dieses Stückes gleich dem Rechteck aus dem andern Stück und dem ganzen Schenkel ist;
3) in dem durch die gezogene Gerade und die Grundlinie gebildeten gleichschenkeligen Dreieck (BCD) ist jeder Winkel (BCD, CBD) über der Grundlinie doppelt so gross als der Winkel an der Spitze;
4) der Aussenwinkel (ACD) dieses Dreiecks, welchen die gezogene Gerade mit dem Schenkel des gegebenen bildet, ist dreimal so gross als der Winkel an der Spitze.

Vorbereitung. Ziehe DE $\perp$ BC.

Beweis. Erster Theil. Aus 51 und 52.

Zweiter Theil. Aus 90, 74, 72.

Dritter Theil. Aus 90 und 38, Zus. 2.
Vierter Theil. Aus 51 und 38.

100. Erklärnng. Innere Winkel eines Vielecks nennt man diejenigen, welche dessen Seiten nach der inneren Seite mit einander bilden; äussere Winkel, welche die Seiten mit den Verlängerungen der an sie angrenzenden nach aussen bilden.

101. Erklärung. Umfang eines Vielecks nennt man die Summe aller seiner Seiten.

102. Erklärung. Ein regelmässiges Vieleck ist dasjenige, dessen Seiten alle gleich sind nnd gleiche Winkel miteinander bilden.

102. Zusatz 2. In einem regelmässigen Vieleck ist der Umfang gleich dem Sovielfachen einer der Seiten, als die Zahl, welche angibt, aus wie vielen Seiten das Vieleck besteht, Einheiten enthält.

103. Lehrsatz. Zieht man aus einer beliebigen Ecke eines beliebigen Vielecks von lauter ausspringenden Winkeln gerade Linien nach allen andern Ecken, so wird das Vieleck in so viele Dreiecke getheilt, als es Seiten hat, weniger zwei.

Beweis. Leicht.

104. Lehrsatz. In allen Vielecken, gleichviel ob regelmässigen oder unregelmässigen, beträgt die Summe aller innern Winkel zweimal so viel Rechte als Seiten sind, weniger vier Rechte.

Beweis. Aus 38, nachdem man das Vieleck durch gerade Linien, die man aus einer Ecke nach allen übrigen zieht, in Dreiecke zerlegt hat.

104. Zusatz 1. Wenn das Vieleck regelmässig ist und die Zahl der Seiten durch g bezeichnet wird, so fasst jeder Winkel, da sie alle gleich sind, so viele Rechte in sich, als durch die Zahl $\frac{2.g - 4}{g}$ ausgedrückt werden.

104. Zusatz 2. Es giebt nur drei Arten von Fignren, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das regelmässige Sechseck, die, um einen und denselben Punkt herumgelegt, einen Raum vollkommen ausfüllen können, ohne etwas übrig zu lassen; es geschieht dies nämlich durch sechs gleichseitige Dreiecke, vier Quadrate und drei Sechsecke.

105. Lehrsatz. Alle Aussenwinkel eines Vielecks sind zusammen gleich vier Rechten.

Beweis. Aus 20 und 104.

107. Lehrsatz. Wenn man alle Winkel eines regelmässigen Vielecks halbirt, so:

1) schneiden sich alle die Geraden (AC, DC, FC, HC, KC, MC Fig. 33.), welche die Winkel halbiren, in einem Punkte (C);
2) sind diese Geraden untereinander gleich und theilen demnach das Vieleck in so viele gleichschenkelige Dreiecke, als es Seiten hat;
3) bilden sie um den Punkt C gleiche Winkel (ACD, DCF u. s. w.);
4) liegt der Punkt C von allen Vielecksseiten gleich weit entfernt, d. h. die Senkrechten (CB, CE, CG u. s. w.), die man von ihm aus nach jenen zieht, sind gleich.

Beweis. Der erste Theil aus 46. Der zweite und dritte Theil aus dem ersten. Der vierte Theil aus 46.

108. Erklärnng. Centrum oder Mittelpunkt eines regelmässigen Vielecks ist ein Punkt von solcher Lage, dass die von ihm aus nach den Ecken gezogenen Geraden gleich sind und die Winkel des Vielecks halbiren; diese Geraden heissen Strahlen oder Radien.

109. Erklärung. Die Senkrechte, die aus dem Mittelpunkte eines regelmässigen Vielecks auf eine seiner Seiten gefällt wird, heisst Perpendikel.

110. Erklärung. Die gleichschenkeligen Dreiecke, in welche ein Vieleck (durch die Radien) zerlegt wird, werden mit Recht Mittelpunktsdreiecke genannt, weil sie um den Mittelpunkt herumstehn; und da sie alle untereinander gleich sind, so gilt für alle, was für eines derselben bewiesen wird.

110. Zusatz 1. Jeder Mittelpunktswinkel eines regelmässigen Vielecks, welcher durch zwei nach den Endpunkten einer und derselben Seite gezogene Radien gebildet wird, ist $= \frac{4R}{g}$, wenn g die Anzahl der Seiten bezeichnet; und mithin ist ein Winkel, welchen zwei Vielecksseiten miteinander bilden, $= (n - 2)$ halben Mittelpunktswinkeln.

110. Zusatz 2. In einem regelmässigen Sechseck ist das durch eine Seite und zwei Radien gebildete Mittelpunktsdreieck gleichseitig.

112. Lehrsatz. Wenn die Anzahl der Seiten eines regel-

mässigen Vielecks eine **gerade** ist, so machen die beiden Linien (AC und CH, CD und CK u. s. w. Fig. 33.), welche vom Mittelpunkte nach zwei gegenüberstehenden Ecken gezogen werden, eine einzige Gerade aus, welche das Vieleck in zwei gleiche Theile theilt; eine solche Gerade heisst **Diagonale**; zwei Senkrechte (CB und CJ, CE und CL u. s. w.), die man vom Mittelpunkte auf zwei Gegenseiten fällt, machen gleichfalls eine einzige Gerade aus, welche auch das Vieleck in zwei gleiche Theile theilt; dasselbe gilt von jeder durch den Mittelpunkt gezogenen Geraden (OCP); endlich sind je zwei Gegenseiten (KH und AD, DF und KM u. s. w.) parallel.

Beweis. Aus 21, 107, 26.

113. **Lehrsatz.** Wenn man in einem regelmässigen Vieleck von gerader Seitenzahl, also in einem symmetrischen, die Endpunkte paralleler Seiten durch gerade Linien verbindet, so bilden die gegenseitigen Durchschnittspunkte derselben um den Mittelpunkt herum ein neues regelmässiges Vieleck, welches dieselbe Anzahl Seiten hat, als das gegebene, und dessen Perpendikel halb so gross ist, als die Seite des gegebenen Vielecks. (Fig. 33.)

Beweis. Aus 51, 46, 112.

115. **Lehrsatz.** Wenn man auf jeder Seite eines regelmässigen Vielecks von ungerader Seitenzahl in jedem ihrer Endpunkte eine Senkrechte errichtet, so bilden die Durchschnittspunkte derselben zwei einander gleiche regelmässige Vielecke und jedes von gleicher Seitenzahl mit dem gegebenen; das Perpendikel derselben ist halb so gross als die Seite des gegebenen Vielecks; sie haben einen gmeinschaftlichen Mittelpunkt mit diesem und liegen ganz innerhalb desselben, es sei denn, dass es ein (gleichseitiges) Dreieck sei. Bezeichnet man jede Ecke des gegebenen Vielecks als den Anfangspunkt einer Seite und den Endpunkt der nächstvorhergehenden, so wird das eine jener Vielecke von den Senkrechten gebildet, welche in den Anfangspunkten, das andere von denen, welche in den Endpunkten der Seiten auf diesen errichtet sind. (Fig. 34.)

Beweis. Aus 38, 46, 51.

116. **Lehrsatz.** Wenn man auf allen Seiten eines regelmässigen Vielecks Punkte (E, F, G, J, L Fig. 35.) annimmt, so dass sie von den nächsten Ecken gleich weit entfernt sind, so bilden die sie verbindenden Geraden ein regelmässiges Vieleck, wel-

ches die gleiche Anzahl Seiten und denselben Mittelpunkt mit dem gegebenen hat.

Beweis. Erster Theil. Aus der Congruenz der Dreiecke AEL, EDF u. s. w. (45).

Zweiter Theil. Aus der Congruenz der Dreiecke AOL, EOD u. s. w., daher LO = EO = FO u. s. w., also O der Mittelpunkt.

117. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines regelmässigen Vielecks ist gleich dem eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Perpendikel des Vielecks ist.

Beweis. Aus 107, 102.

117. Zusatz. Der Inhalt eines regelmässigen Vielecks ist gleich dem eines Rechtecks, dessen Höhe gleich dem Perpendikel des Vielecks und dessen Grundlinie gleich dem halben Umfang desselben ist.

118. Lehrsatz. Der Inhalt aller geradlinigen Figuren wird auf den Inhalt von Rechtecken zurückgeführt, und man kann allezeit ein Rechteck construiren, welches mit einer gegebenen Figur gleichflächig ist

Beweis. Die Figur wird in Dreiecke zerlegt durch gerade Linien, die man von einer ihrer Ecken nach den übrigen zieht; jedes dieser Dreiecke ist alsdann gleich einem bestimmten Rechteck (84, Z. 1), und man kann, wie aus den früheren Sätzen hervorgeht, ein Rechteck construiren, welches gleich der Summe jener Rechtecke, mithin gleich dem gegebenen Vieleck ist.

Aus dem dritten Buche,

handelnd

Von der Proportionalität.

119. Erklärung. Wenn eine Grösse mehrere Mal genommen, oder mit andern Worten, wenn eine Grösse durch die Multiplication mit irgend einer Zahl, einer andern Grösse gleichkommt, so ist sie ein genauer, ein aliquoter Theil der zweiten Grösse; wenn sie hingegen ein- oder mehreremal genommen derselben nicht gleichkommt, sondern kleiner bleibt und, noch einmal mehr genommen, grösser wird, so ist sie ein nicht genauer Theil der zweiten Grösse.

120. Erklärung. Eine Grösse wird das Vielfache einer andern genannt, wenn diese letztere sie misst oder ein aliquoter Theil von ihr ist.

121. Erklärung. Zwei (oder mehrere) Grössen heissen Gleichvielfache von zwei (oder mehreren) anderen, wenn sie dieselben gleich vielmal in sich fassen, eine jede nämlich die Grösse, von welcher sie das Vielfache ist.

122. Erklärung. Potenzen einer Zahl nennt man die Zahlen, welche man erhält, wenn man die erstgenannte ein-, zwei-, drei-, vier- u. s. w. mal durch sich selbst multiplicirt. Man erhält namentlich die zweite Potenz, auch Quadrat genannt, wenn die Zahl einmal durch sich selbst multiplicirt wird; die dritte Potenz, auch Cubus oder Würfel genannt, wenn die Zahl zweimal, die vierte Potenz, wenn sie dreimal, die fünfte Potenz, wenn sie viermal u. s. f. mit sich selbst multiplicirt wird.

123. Erklärung. Hat man eine Zahl, so nennt man Wurzeln derselben diejenigen Zahlen, welche, mit sich selbst multiplicirt, die erstere geben,* und zwar zweite oder Quadrat-Wurzel, dritte oder Cubik-Wurzel, vierte, fünfte u. s. w. Wurzel die Zahlen, welche ein-, zwei-, drei-, vier- u. s. w. mal mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl ausmachen.

124. Erklärung. Gleichartige Grössen nennt man Grössen von solcher Beschaffenheit, dass ein Vielfaches der kleineren der grösseren gleichkommen oder sie übertreffen kann; oder auch Grössen, welche aus derselben Art von Einheiten bestehen.

So sind z. B. Linien gleichartige Grössen; ebenso Parallelogramme; Oxhoft und Eimer, weil eine gewisse Anzahl Eimer einen Oxhoft ausmachen; aber eine Linie, ein Parallelogramm und ein Oxhoft sind ungleichartige Grössen.

125. Erklärung. Messbare oder commensurable Grössen oder Zahlen nennt man diejenigen, welche ein gemeinschaftliches Maass haben, sei es, dass die kleinere das Maass der grösseren, d. h. genau einige Mal in derselben enthalten ist oder darin aufgeht, sei es, dass eine dritte Grösse das Maass oder ein genauer Theil von beiden ist.

125. Zusatz 1. Alle Brüche sind commensurabel zu einander, indem man sie nur auf denselben Nenner zu bringen braucht.

126. Erklärung. Incommensurable Grössen nennt

man diejenigen, welche kein gemeinschaftliches Maass haben, d. h. von denen die eine kein Vielfaches von der andern oder kein Vielfaches von einem genauen Theile derselben ist.

127. Erklärung. Wenn man zwei gleichartige Grössen zu dem Ende miteinander vergleicht, um die Grösse der einen aus der der andern unmittelbar zu bestimmen, so nennt man dies das Verhältniss derselben ausfinden, und die Bestimmung selbst ist das Verhältniss, welches die Grössen zu einander haben.

128. Erklärung. Wenn man zwei gleichartige Grössen miteinander vergleicht, um zu erfahren, welches Vielfache die eine von der andern ist oder, was auf dasselbe hinauskommt, wie vielmal die letztere in der ersteren enthalten oder der wievielste Theil sie von ihr ist, so sagt man, man bestimme das geometrische Verhältniss oder auch kurzweg das Verhältniss, das zwischen den Grössen Statt findet; so dass das geometrische Verhältniss oder kurz das Verhältniss zwischen zwei Grössen anzeigt, wie vielmal die eine die andere in sich schliesst.

Die Grössen, welche das Verhältniss bilden, heissen dessen Glieder; die Grösse, die man zuerst nennt, wird Vorderglied, die andere Hinterglied genannt; so dass jedes Verhältniss aus einem Vorder- und einem Hintergliede besteht.

129. Erklärung. Anzeiger oder Exponent eines Verhältnisses nennt man den Quotient, den man aus der Division des Vordergliedes durch das Hinterglied erhält, oder als daraus erhalten annimmt.

129. Zusatz. Wenn das Vorderglied grösser ist als das Hinterglied, so ist der Anzeiger eine ganze Zahl oder eine ganze Zahl mit einem Bruch; ist das Vorderglied kleiner als das Hinterglied, so ist der Anzeiger ein echter Bruch; ist der Anzeiger commensurabel, so ist es das Verhältniss ebenfalls; ist aber der Anzeiger incommensurabel, so ist auch das Verhältniss incommensurabel; und umgekehrt.

130. Erklärung. Zwei Verhältnisse werden gleich oder dieselben genannt, wenn ihre Anzeiger gleich sind; aber von zwei Verhältnissen ist dasjenige das grössere, welches den grössern Anzeiger hat, oder, was auf dasselbe hinauskommt: Ein Verhältniss ist ebensogross, grösser oder kleiner als ein anderes, jenachdem der Anzeiger des erstern ebensogross, grösser oder kleiner als der des letztern ist. Haben nun verschiedene Grössen dasselbe Ver-

hältniss zu einander, so sagt man, sie seien **proportional**; und **Proportionalität** greift Platz, wo eine Gleichheit von Verhältnissen Statt findet.

130. **Zusatz 1.** Wenn vier Grössen proportionirt sind und die erste zur zweiten commensurabel ist, so ist die dritte zur vierten gleichfalls commensurabel; ist dagegen die erste zur zweiten incommensurabel, so ist es auch die dritte zur vierten.

130. **Zusatz 2.** Alle Brüche und alle Produkte, aus der Multiplikation von Zahlen entstanden, sind Verhältnisse; denn setzt man $\frac{A}{B} = q$ und $D \times E = C$, so ist zwischen A und B dasselbe Verhältniss als zwischen q und der Einheit; und E hat zur Einheit dasselbe Verhältniss wie C zu D.

130. **Zusatz 3.** Die Proportionalität erheischt mindestens drei Grössen.

131. **Erklärung.** Wenn Grössen, die gleiches Verhältniss zu einander haben, alle verschieden sind, so sagt man, sie seien **unterbrochen** proportionirt; sind sie jedoch so beschaffen, dass immer eine eines vorhergehenden Verhältnisses im darauffolgenden sich wiederholt, d. h. dass das Hinterglied des ersten Verhältnisses das Vorderglied des zweiten, das Hinterglied des zweiten das Vorderglied des dritten u. s. f. ist, alsdann sagt man, die Grössen seien **stetig** proportionirt, und die stetige Proportionalität wird geometrische **Reihe** oder **Progression** genannt, in welcher **gleichweitabstehende** Glieder diejenigen sind, die von einem bestimmten Gliede durch eine gleiche Anzahl von Gliedern getrennt sind.

131. **Zusatz.** Die geometrische Reihe heisst eine **steigende** oder **fallende**, jenachdem die Glieder fortlaufend grösser oder kleiner werden.

132. **Erklärung.** Wenn drei Grössen stetig proportionirt sind, so wird die zweite die **mittlere Proportionale** und die letzte die **dritte Proportionale** genannt; sind vier Grössen unterbrochen proportionirt, so heisst die letzte die **vierte Proportionale**; ausserdem heissen das erste und letzte Glied: **äussere Glieder**, und das zweite und dritte: **mittlere Glieder**.

133. **Erklärung.** Die Vorderglieder der beiden Verhältnisse einer Proportion werden in Bezug des einen auf das andere

entsprechende (homologe) Glieder genannt; dasselbe gilt von deu Hintergliedern.

134. Erklärung. Wenn man vier Grössen hat und betrachtet ihr Verhältniss in Bezug auf die Reihenfolge, in welcher man sie aufführt, so sagt man, sie stehen in geradem Verhältniss zu einander, wenn sich die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten verhält oder mit andern Worten: wenn das Verhältniss der ersten zur zweiteu gleich dem Verhältniss der dritten zur vierten ist; im umgekehrten Verhältniss dagegen, wenn sich die erste zur zweiten wie die vierte zur dritten verhält, oder die zweite zur ersten wie die dritte zur vierteu.

135. Erklärung. Zusammengesetzte Verhältnisse sind solche, welche aus verschiedenen anderen Verhältnissen gebildet werden, und zwar durch Mnltiplication dieser letzteren Verhältnisse (die man in diesem Falle Wurzeln oder Factoren nennt). Wenn alle Wurzeln gerade genommen werden, so ist das zusammengesetzte Verhältuiss ein gerades Verhältniss aus allen; werden sie sämmtlich umgekehrt genommen, so ist das zusammengesetzte Verhältniss ein umgekehrtes zusammengesetztes Verhältniss der Wurzeln; werden endlich einige Wurzeln gerade, andere umgekehrt genommen, so ist das zusammengesetzte Verhältuiss aus geraden und umgekehrten Verhältnissen gebildet.

136. Erklärung. Wenn ein Verhältniss aus gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist, so nennt man es zweifach hohes, dreifach hohes, vierfach hohes u.s.w., jenachdem die Zusammensetzung aus zwei, drei, vier u. s. w. gleichen Verhältnissen Statt fand und folglich das zusammengesetzte Verhältniss die zweite, dritte, vierte u. s. w. Potenz eines der gleichen Verhältnisse ist.

137. Erklärung. Man nennt ein Verhältniss das zweifach niedere, dreifach niedere u.s.w. von einem andern gegebenen, wenn es die zweite, dritte u. s. w. Wurzel des letztern ist.

138. Forderungssatz. Man fordert, dass, wenn drei Grössen gegeben sind, eine vierte Proportionale zu ihnen gefunden werden könne.

139. Forderungssatz. Man fordert, dass zu zwei gegebenen Grössen eine dritte Proportionale gefuudeu werden könne.

140. Grundsatz. Gleiche Grössen haben dasselbe Verhält-

niss zu einander; auch hat eine jede von ihnen ein gleiches Verhältniss zu einer dritten Grösse.

141. **Grundsatz.** Von zwei ungleichen Grössen hat zu einer und derselben dritten die grössere ein grösseres Verhältniss als die kleinere; jedoch hat die dritte zu der grösseren ein kleineres Verhältniss als zur kleineren und ein grösseres Verhältniss zu der kleineren als zur grösseren, und umgekehrt.

142. **Grundsatz.** Grössen, welche zu einer und derselben Grösse ein gleiches Verhältniss haben, sind gleich; und umgekehrt.

143. **Grundsatz.** Gleich vielfache und gleich aliquote Theile von zwei gleichen Grössen sind gleich, und die von zwei ungleichen Grössen haben dasselbe Verhältniss zu einander, als die Grössen selbst.

143. **Zusatz.** Man kann dies auch so ausdrücken: Wenn zwei Grössen einander gleich sind, so wird diese Gleichheit nicht gestört, wenn die Grössen durch dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt werden, und eine Grösse bleibt dieselbe, wenn sie durch dieselben Grössen multiplicirt und dividirt wird.

144. **Grundsatz.** Wenn zwei Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich.

145. **Grundsatz.** Wenn von zwei Verhältnissen, die einander gleich sind, das eine grösser oder kleiner als ein drittes ist, so ist es auch das zweite.

146. **Lehrsatz.** Wenn vier Grössen A, B, C, D proportionirt sind, und man nimmt Gleichvielfache (m) von der ersten und dritten (mA, mC) und andere Gleichvielfache (n) von der zweiten und vierten (nB, nD), so ist das Vielfache von der dritten ebensogross, grösser oder kleiner als das von der vierten, jenachdem das Vielfache von der ersten ebensogross, grösser oder kleiner als das von der zweiten ist, welche Vielfache man auch immer nehmen möge.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $A : B = C : D$ oder

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$\text{mithin} \quad \frac{mA}{nB} = \frac{mC}{nD} \quad (143)$$

folglich, da mA entweder $>$ oder $=$ oder $< nB$, ist auch mC entweder $>$ oder $=$ oder $< nD$.

147. **Lehrsatz.** Wenn das Verhältniss von A zu B grösser

ist als das von C zu D, so kann man solche Gleichvielfache (m) von der ersten und dritten (mA, mC) und solche andere (n) von der zweiten und vierten nehmen (nB, nD), dass, wenn das Vielfache von der ersten (mA) das von der zweiten (nB) übertrifft, dennoch das von der dritten (mC) das von der vierten (nD) nicht übertrifft, sondern gleich oder kleiner ist.

Beweis. Es sei $A : B > C : D$ oder

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$$

mithin $\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$. Nun kann, wenn $mA > nB$ ist, $\frac{mA}{nB} > \frac{mC}{nD}$ sein, sowohl wenn $mC > nD$, als auch wenn $mC = nD$ oder $mC < nD$ ist.

148. Lehrsatz. Wenn man zwei Verhältnisse $A : B$ und $C : D$ hat, und es sind Gleichvielfache der Vorderglieder (mA, mC) ebensogross, grösser oder kleiner als andere Gleichvielfache der Hinterglieder (nB, nD), so sind die Verhältnisse gleich.

Beweis. Der Lehrsatz behauptet: Ist, wenn mA entweder $>$ oder $=$ oder $<$ nB, dann auch $mC >$ oder $=$ oder $< nD$, so ist $A : B = C : D$.

Wenn dies nicht wäre, so wäre entweder $A : B > C : D$ oder $C : D > A : B$. Fände das Erstere Statt, so könnte man (147), wenn $mA >$ oder $=$ oder $< nB$ ist, für jeden dieser drei Fälle haben: entweder $mC > nD$ oder $mC = nD$ oder $mC < nD$, was gegen die Voraussetzung ist. Auf gleiche Weise zeigt man, dass ebensowenig $C : D > A : B$ sein kann; mithin ist $A : B = C : D$.

149. Lehrsatz. In jeder Proportion ist, jenachdem das Vorderglied des ersten Verhältnisses grösser, ebensogross oder kleiner als sein Hinterglied ist, auch das Vorderglied des zweiten Verhältnisses grösser, ebensogross oder kleiner als sein Hinterglied; oder jenachdem das Vorderglied des ersten Verhältnisses grösser, ebensogross oder kleiner als das Vorderglied des zweiten Verhältnisses ist, ist auch das Hinterglied des ersten Verhältnisses grösser, ebensogross oder kleiner als das des zweiten; oder wenn das Hinterglied des einen Verhältnisses grösser, ebensogross oder kleiner als das Hinterglied des andern, so ist auch das Vorderglied des erstern grösser, ebensogross oder kleiner als das des andern.

Beweis. Es ist $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$; ist nun $A > B$, so muss auch $C > D$ sein u s. w.

150. **Lehrsatz.** Wenn vier Grössen eine geometrische Proportion bilden, so ist das Produkt aus den beiden äussern gleich dem Produkt aus den beiden mittleren; und umgekehrt: Wenn zwei Produkte, von denen jedes aus zwei Grössen besteht, gleich sind, so bilden die Grössen eine geometrische Proportion und zwar dergestalt, dass eine Grösse des ersten Produktes sich zu einer Grösse des zweiten verhält, wie die andere dieses letzteren zur anderen des ersteren.

Beweis. Aus 129, 130 und 143, Zus.

150. **Zusatz 1.** Wenn drei Grössen stetig proportionirt sind, so ist das Produkt aus den beiden äussern gleich der zweiten Potenz der mittleren.

150. **Zusatz 2.** Hieraus folgen von selbst die Regeln, um eine vierte, dritte oder mittlere Proportionale zu finden.

151. **Lehrsatz.** Wenn vier Grössen A, B, C, D proportionirt sind, so bleiben sie es auch bei *Verwechselung* des ersten Gliedes des zweiten Verhältnisses und des letzten Gliedes des ersten in ihren Stellen, und auch bei *Umkehrung*, so dass die Vorder- und Hinterglieder in jedem Verhältniss für sich ihre Stellen vertauschen.

Beweis. Aus 150.

151. *Anmerkung 4.* Die vier Glieder einer Proportion können auf verschiedenartige Weise umgestellt werden, wenn man *Verwechselung* und *Umkehrung* mit einander vereinigt; so zwar:

$$A : B = C : D \qquad A : C = B : D$$
$$B : A = D : C \qquad C : A = D : B$$
$$B : D = A : C \qquad C : D = A : B$$
$$D : B = C : A \qquad D : C = B : A$$

Aus denselben proportionirten Grössen $A : B = C : D$ oder aus $A \times D = B \times C$ lassen sich acht andere Proportionen bilden, nämlich:

$$A : B = \frac{1}{D} : \frac{1}{C} \qquad B : A = \frac{1}{C} : \frac{1}{D}$$
$$A : \frac{1}{D} = B : \frac{1}{C} \qquad B : \frac{1}{C} = A : \frac{1}{D}$$
$$C : D = \frac{1}{B} : \frac{1}{A} \qquad C : \frac{1}{B} = D : \frac{1}{A}$$
$$D : C = \frac{1}{A} : \frac{1}{B} \qquad D : \frac{1}{A} = C : \frac{1}{B}$$

Dergleichen Veränderungen kann man nach Belieben fortführen; die Proportionalität zwischen den vier Grössen bleibt bestehen, wenn die Produkte aus den äussern und mittlern Gliedern: $A \times D = B \times C$ geben oder auf diese Gleichheit gebracht werden können

151. Zusatz. Die Zahlen, die zwei gleiche Produkte bilden, können stets so gestellt werden, dass eine geometrische Proportion entsteht.

152. Lehrsatz. Wenn die Produkte von vier Grössen, gebildet aus diesen in der Ordnung, wie sie aufgeführt werden, nämlich aus der ersten und zweiten und aus der dritten und vierten, gleich sind, so stehen die Grössen in umgekehrtem Verhältniss zu einander, d. h. es verhält sich die erste zur dritten, wie die vierte zur zweiten, oder die erste zur vierten, wie die dritte zur zweiten

Beweis. Aus 151, Zus.

152. Zusatz. Hierauf beruht das Verfahren, um zu drei gegebenen Grössen eine vierte Proportionale zu finden, d. i. eine Grösse, die so beschaffen ist, dass die erste und zweite im umgekehrten Verhältniss zu einander stehen, als die dritte und vierte.

153. Lehrsatz. Wenn vier Grössen proportionirt sind, so hat man durch Addition: die Summe der ersten und zweiten $(A + B)$ zur ersten (A) oder zur zweiten (B), wie die Summe der dritten und vierten $(C + D)$ zur dritten (C) oder zur vierten (D); und durch Subtraction: den Unterschied der beiden ersten $(A - B)$ zur ersten (A) oder zur zweiten (B), wie den Unterschied der beiden letzten $(C - D)$ zur dritten (C) oder zur vierten (D); durch Addition und Subtraction vereinigt: die Summe der beiden ersten zum Unterschiede derselben, wie die Summe der beiden letzten zum Unterschiede zwischen ihnen; und umgekehrt für alle diese Fälle.

Beweis. Aus 151, Zus. und 144.

154. Lehrsatz. Wenn das erste Glied einer Proportion das grösste von allen ist, so ist das letzte das kleinste; die Summe des grössten und kleinsten ist grösser als die Summe der beiden andern.

Beweis. Aus 149 und 153.

155. Lehrsatz. Hat man zwei Proportionen $(A : B = C : D$ und $E : F = G : H)$, jede aus vier Gliedern bestehend, so erhält man zwei neue Proportionen, wenn man die Glieder der einen durch

die entsprechenden Glieder der andern multiplicirt oder dividirt, nämlich: $AE : BF = CG : DH$ und $\frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}$.

Beweis. Aus 150 und 151, Zusatz.

155. Zusatz 1. Wenn vier Zahlen proportionirt sind, so sind es auch deren Potenzen und Wurzeln von gleicher Höhe.

155. Zusatz 2. Sind vier Grössen proportionirt, so verhält sich auch die Hälfte der ersten zu der zweiten, wie die dritte zum Doppelten der vierten; oder allgemeiner: die Proportionalität bleibt ungestört, wenn das eine der beiden äussern Glieder durch eine beliebige Zahl dividirt und das andere durch dieselbe Zahl multiplicirt wird. Dasselbe findet Statt bei den beiden Mittelgliedern.

156. Lehrsatz. Wenn man zwei oder mehrere Proportionen hat, in denen die Vorder- oder Hinterglieder der einen auch entweder die Vorder- oder Hinterglieder der andern sind ($A : B = D : E$ und $B : C = E : F$), so sind die übrigen Glieder der ersten, jedes in seiner Stelle, den übrigen Gliedern der zweiten ebenfalls proportionirt ($A : C = D : F$).

Beweis. Aus 155.

156. Zusatz 1. Wenn $A : B = D : E$ und
$B : C = E : F$,
oder wenn $A : B = E : F$ und
$B : C = D : E$,
so ist in beiden Fällen: $D >$ oder $=$ oder $< F$, jenachdem
$A >$ oder $=$ oder $< C$.

156. Zusatz 2. Man kann stets in einer Proportion für zwei Glieder zwei andere ihnen proportionirte setzen.

158. Lehrsatz. Wenn man zwei Proportionen hat ($A : B = C : D$, $E : F = G : H$), und die Verhältnisse, aus denen sie bestehen, gleich sind $\left(\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \frac{G}{H}\right)$, so sind die Summen oder Unterschiede der Glieder beider Proportionen, in derselben Reihenfolge genommen, ebenfalls proportionirt.

Beweis. Aus 150.

158. Zusatz. Wenn man zu den Hintergliedern einer Proportion andere Grössen addirt oder von ihnen abzieht, welche in demselben Verhältniss zu einander stehen, als die Vorderglieder, so bleiben diese Summen oder Unterschiede in gleichen Verhältnissen mit den Vordergliedern.

159. **Lehrsatz.** Wenn man zwei Proportionen hat ($A:B = C:D$ und $E:F = G:H$), und es sind die Vorderglieder der einen proportionirt den Vordergliedern der andern ($A:C = E:G$), so sind die Summen oder Unterschiede der Grössen beider Proportionen, in der Ordnung der Grössen genommen, gleichfalls proportionirt.

Beweis. Aus 150.

160. **Lehrsatz.** Wenn verschiedene Grössen (A, B, C, D, E u. s. f.) stetig proportionirt sind oder eine geometrische Reihe bilden, so steht die erste zur dritten in zweifach höherem Verhältniss als die erste zur zweiten; zur vierten im dreifach höheren Verhältniss und so fort, kurz die erste verhält sich zur $n$ten, wie die $(n-1)$te Potenz der ersten zur $(n-1)$ten Potenz der zweiten.

Beweis. Aus 131, 155 und 156.

160. **Zusatz 1.** Daher ist das Verhältniss des ersten Gliedes zu irgend einem andern zusammengesetzt aus den Verhältnissen von allen zwischenliegenden Gliedern zu einander, d. i., da alle diese Verhältnisse gleich sind, aus dem Verhältnisse des ersten Gliedes zum zweiten, so oft mit sich selbst multiplicirt, als Glieder zwischen dem ersten und dem angenommenen vorhanden sind.

160. **Zusatz 2.** Die mittlere Proportionale zwischen zwei Grössen ist stets kleiner als die grössere, aber grösser als die kleinere; denn wenn $A:B = B:C$, so ist auch

$$A^2 : B^2 = B^2 : C^2 \text{ (155, Zus. 1)}$$
$$= A : C \text{ (160)},$$

aber $A > C$, folglich $A > B$ und $B > C$ (149).

160. **Zusatz 3.** Jedes Glied einer geometrischen Reihe ist gleich dem vorhergehenden multiplicirt durch das Verhältniss des zweiten zum ersten, d. h. durch den Anzeiger.

160. **Zusatz 4.** Es kann folglich jede geometrische Reihe, wenn A das erste Glied, B das zweite und q der Anzeiger, also $q = \frac{B}{A}$ ist, wie nachstehend angegeben, ausgedrückt werden:

$$A, A_q, A_q{}^2, A_q{}^3, A_q{}^4, A_q{}^5 \ldots\ldots A_q{}^{n-1}.$$

160. **Zusatz 5.** Jedes beliebige Glied (das $n$te) einer geometrischen Reihe ist gleich dem ersten multiplicirt mit der $(n-1)$ten Potenz des Anzeigers.

160. **Zusatz 6.** Wenn das erste Glied grösser als das zweite und mithin der Anzeiger ein Bruch ist, so ist jedes Glied

kleiner als das vorhergehende, und die Reihe ist eine **fallende**, in welcher die Glieder nach einem sich gleich bleibenden Verhältnisse immer kleiner werden, je weiter die Reihe fortgeführt wird, ohne jedoch jemals Null werden zu können; und wenn das zweite Glied grösser ist als das erste, so ist die Reihe steigend; die Glieder werden, je weiter man die Reihe fortsetzt, nach einem sich gleich bleibenden Verhältnisse immer grösser; das erste Glied ist das kleinste, kann aber niemals Null sein.

160. Zusatz 7. Nichts hindert, die Reihe, die man mit A anzufangen angenommen hat, als bereits vor A beginnend anzusehen; nämlich:

$$\frac{A}{q^{n-1}}, \ldots\ldots \frac{A}{q^4}, \frac{A}{q^3}, \frac{A}{q^2}, \frac{A}{q^1}, \frac{A}{q^0}, A_q, A_q^2, A_q^3, A_q^4 \ldots . A_q^{n-1}$$

oder

$$A_q^{-(n-1)} \ldots . A_q^{-4}, A_q^{-3}, A_q^{-2}, A_q^{-1}, A_q^0, A_q, A_q^2, A_q^3, A_q^4 \ldots . A_q^{n-1}.$$

160. Zusatz 8. Man kann auch die Anzahl der Glieder einer gegebenen Reihe vermehren, indem man zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern eine Anzahl mit diesen stetig proportionirter einschiebt, durch welches Verfahren die Reihe dennoch geometrisch bleibt; z. B. in der vorhergehenden Reihe:

$$A, A_q^{\frac{1}{4}}, A_q^{\frac{1}{2}}, A_q^{\frac{3}{4}}, A_q, A_q^{1\frac{1}{4}}, A_q^{1\frac{1}{2}}, A_q^{1\frac{3}{4}}, A_q^2 \text{ u. s. f.}$$

oder:

$$A, A_q^{0,25}, A_q^{0,5}, A_q^{0,75}, A_q^1, A_q^{1,25}, A_q^{1,5}, A_q^{1,75}, A_q^2 \text{ u. s. f.}$$

Es gibt daher keine Zahl, die man nicht als Glied einer Reihe betrachten könnte, weil es keine Zahl gibt, die nicht irgend einer Wurzel von einer gegebenen Zahl gleich wäre. So ist z. B. $5 = 10^{\frac{1}{1,43069}} = 10^{0,69897} = 10^{\frac{69897}{100000}} = \sqrt[100000]{10^{69897}}$. Es kann also 5 betrachtet werden als ein Glied einer geometrischen Reihe, in welcher 1 das erste und 10 das letzte Glied ist.

161. Lehrsatz. In jeder geometrischen Reihe ist das Produkt von zwei Gliedern, welche sie auch sein mögen, gleich dem Produkte von zwei andern, die gleich weit von jenen entfernt sind, das eine von dem einen, das andere von dem andern, und zwar so, dass entweder das eine **vor** dem einen und das andere **nach** dem andern oder beide zwischen beiden stehen.

Beweis. Aus 160, Zus. 4 und Zus. 1.

161. Zusatz. Im Fall daher die Anzahl der Glieder zwischen den beliebig angenommenen ungerade ist, ist das in Rede

stehende Produkt gleich der zweiten Potenz des mittelsten Zwischengliedes.

162. **Lehrsatz.** In jeder geometrischen Reihe, deren erstes Glied die Einheit ist (wie $1, q, q^2, q^3 \ldots q^n$), ist das Produkt von zwei Gliedern gleich einem Gliede derselben Reihe, welches von einem jener beiden eben so weit entfernt ist, als das andere von dem ersten Gliede der Reihe oder der Einheit.

Beweis. Aus 161.

163. **Lehrsatz.** In allen geometrischen Reihen verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie das erste Glied zum zweiten.

Beweis. Aus 158 und 143.

163. **Zusatz 2.** Wenn A das erste Glied, B das zweite, Z das letzte, q der Anzeiger oder der Quotient von B durch A dividirt und S die Summe der ganzen Reihe, so ist:

$$S = \frac{A^2 - ZB}{A - B}$$ oder wenn n die Anzahl der Glieder bezeichnet:

$$S = \frac{A^2 - A^2q^n}{A - A_q} = \frac{A(q^n - 1)}{q - 1}.$$

164. **Lehrsatz.** Wenn vier oder mehrere Grössen (A, B, C, D und E) so beschaffen sind, dass sie sich wie ihre Unterschiede verhalten ($A : B = A - B : B - C$ u. s. w.), so bilden sie eine geometrische Progression.

Beweis. Aus 151 und 153.

165. **Erklärung.** Wenn man zwei gleichartige Grössen zu dem Ende mit einander vergleicht, um zu erfahren, um wieviel die eine die andere übertrifft, d. h. wie gross der Unterschied zwischen beiden ist, so heisst dies das **arithmetische Verhältniss** zwischen den beiden Grössen ausfinden, und der Unterschied selbst ist das arithmetische Verhältniss.

166. **Erklärung.** Man nennt arithmetische Verhältnisse **identisch** oder **gleich**, wenn der Unterschied der Grössen, zwischen welchen die Verhältnisse Statt finden, derselbe ist, das heisst, wenn das Vorderglied des einen Verhältnisses sein Hinterglied um ebensoviel übertrifft oder von ihm übertroffen wird, als das Vorderglied eines jeden der andern Verhältnisse sein Hinterglied übertrifft oder von demselben übertroffen wird.

Und hiernach sagt man, dass zwischen Grössen arithmetische Proportionalität Statt findet, oder dass Grössen in arithmetischer

Proportion stehen oder arithmetisch proportionirt sind, wenn die arithmetischen Verhältnisse je zweier Grössen identisch sind. So ist z. B. $10:4 = 7:1$ eine arithmetische Proportion, weil $10-4 = 6$ und $7-1=6$, und allgemein ist $A:B = C:D$ eine arithmetische Proportion, wenn $A-B = C-D$ oder $B-A = D-C$.

Selbstredend hat man in beiden Verhältnissen den Unterschied der Glieder in derselben Ordnung zu nehmen, in beiden das Hinterglied vom Vordergliede, oder in beiden das Vorderglied vom Hintergliede abzuziehn.

167. Erklärung. Grössen sind unterbrochen proportionirt, wenn die Glieder der beiden gleichen Verhältnisse verschieden sind; stetig proportionirt hingegen, wenn das Hinterglied des ersten Verhältnisses das Vorderglied im zweiten, das Hinterglied des zweiten das Vorderglied im dritten u. s. w. ist. Die stetige Proportionalität führt den Namen arithmetische Reihe oder Progression. Gleichweit abstehende Glieder sind diejenigen, welche in Bezug auf ein drittes Glied durch eine gleiche Anzahl von Gliedern von demselben geschieden sind.

167. Zusatz. Die Reihe, welche stetig proportionirte Grössen bilden, ist steigend oder fallend, jenachdem die Glieder bei Fortführung der Reihe immer grösser oder kleiner werden.

168. Lehrsatz. Bilden vier Grössen eine arithmetische Proportion, so ist die Summe der äussern Glieder gleich der Summe der mittleren.

Beweis. Aus 166.

168. Znsatz. Wenn drei Grössen stetig arithmetisch proportionirt sind, so ist die Summe der äussern doppelt so gross als die mittlere Grösse und mithin das Mittelglied gleich der halben Summe der beiden äussern.

169. Lehrsatz. Je weniger zwei Zahlen von einander unterschieden sind, desto weniger unterscheidet sich ihr arithmetisches Mittel von ihrer mittleren geometrischen Proportionale.

Beweis. Aus 168, Zus. und 150, Zus. 1.

170. Lehrsatz. Wenn mehrere Grössen eine arithmetische Reihe bilden, so ist der Unterschied, um welchen sie zu- oder abnehmen, constant, so dass eine arithmetische Reihe folgende Form haben kann:

$$A,\ A \pm V,\ A \pm 2V,\ A \pm 3V\ \ldots\ldots\ A \pm (n-1)V.$$

Beweis. Aus 167.

170. Zusatz 1. Jedes Glied ist gleich der Summe oder dem Unterschiede des vorhergehenden Gliedes und des Anzeigers (oder des constanten Unterschiedes), jenachdem die Reihe steigend oder fallend ist.

170. Zusatz 2. Jedes Glied ist gleich der Summe oder dem Unterschiede des ersten Gliedes und des Anzeigers, der letztere multiplicirt mit der Zahl, welche die Menge der dem angenommenen Gliede vorhergehenden Glieder angibt.

170. Zusatz 3. Das Verhältniss des ersten Gliedes zum dritten ist doppelt so gross als das des ersten zum zweiten; das Verhältniss des ersten Gliedes zum vierten ist dreimal so gross als das des ersten zum zweiten u. s. f., so dass auch hier, jedoch in arithmetischem Sinne, zweifach hohe, dreifach hohe u. s. w. Verhältnisse Statt haben.

170. Zusatz 4. Eine aufsteigende Reihe kann mit Null beginnen und die Steigung fortgeführt werden, so weit man will; eine absteigende Reihe kann mit Null enden oder noch unter Null fortgehen; alsdann nehmen die Glieder anscheinend wieder zu, indem sie in ihrer Reihenfolge dieselben sind, wie die Glieder über Null (von Null nach dem Anfangsgliede hin); doch werden sie als negativ betrachtet und mit dem Zeichen (—) minus versehen: $4V, 3V, 2V, V, 0, -V, -2V, -3V, -4V$ u. s. f.

170. Zusatz 5. Die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 .... bilden eine arithmetische Reihe.

171. Lehrsatz. In einer arithmetischen Reihe ist die Summe zweier Glieder gleich der Summe zweier andern, die gleich weit von jenen entfernt sind, so zwar, dass das eine von diesen um ebensoviel Glieder vor oder nach dem einen von jenen steht, als das andere von diesen nach oder vor dem anderen von jenen.

Beweis. Aus 170.

171. Zusatz. Wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, so ist die Summe zweier Glieder, welche gleich weit vom Mittelgliede entfernt sind, gleich dem doppelten Mittelgliede oder dieses gleich der halben Summe jener beiden.

172. Lehrsatz. Ist Null das erste oder letzte Glied einer arithmetischen Reihe, so ist die Summe zweier Glieder gleich einem dritten, welches ebensoweit von einem derselben entfernt ist als das andere vom Anfang oder vom Ende der Reihe, oder von Null.

Beweis. Aus 171.

173 **Lehrsatz.** Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe ist gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes multiplicirt mit der halben Gliederzahl.

Beweis. Aus 171.

173. **Zusatz.** Daher ist die Summe aller Glieder einer arithmetischen Reihe auch gleich der halben Gliederzahl multiplicirt mit der Summe oder dem Unterschiede von dem doppelten ersten Gliede und dem so vielmal genommenen Anzeiger, als die Anzahl der Glieder weniger eins beträgt:

$$S = \frac{[2A \pm (n-1)V]n}{2}.$$

174. **Erklärung.** Von drei Grössen (A, B, C) sagt man, sie seien **harmonisch** proportionirt, wenn das geometrische Verhältniss der ersten zur dritten gleich ist dem geometrischen Verhältniss des Unterschiedes zwischen der zweiten und ersten zum Unterschiede zwischen der dritten und zweiten; das heisst: wenn $A : C = B - A : C - B$, so sind A, B, C harmonisch proportionirt.

174. **Anmerkung 2.** Hat man drei Linien AD, AC, AB, so sind sie harmonisch proportionirt, wenn

$$AD : AB = AD - AC : AC - AB,$$

wo alsdann AD die grösste, AC die zweitgrösste und AB die kleinste ist; nimmt man auf der Linie AD, AC = AC, AB = AB, so ist AD - AC = CD und AC - AB = BC, und man erhalt demnach AD : AB = CD : BC oder

$$AD : CD = AB : BC$$

und man sagt alsdann, dass die Linie AD harmonisch geschnitten sei, woraus folgende Erklärung von La Hire (section Con. Lib. I. def. 1.) folgt: „Eine gerade Linie „AD ist harmonisch getheilt, wenn sich die ganze Linie (AD) zu einem der äussern „Abschnitte (AB oder CD) verhalt, wie der andere äussere Abschnitt (CD oder AB) „zu dem mittleren: oder, wenn das Rechteck aus der ganzen Linie und dem mitt„lern Abschnitt gleich ist dem Rechteck aus den beiden äussern."

175. **Erklärung.** Mehrere Grössen bilden eine harmonische Reihe, wenn sich die erste zur dritten verhält, wie der Unterschied zwischen der zweiten und ersten zum Unterschied zwischen der dritten und zweiten, d. h. A, B, C, D, E, F u. s. w. bilden eine harmonische Reihe, wenn:

$$A : C = B - A : C - B$$
$$B : D = C - B : D - C$$
$$C : E = D - C : E - D$$
$$D : F = E - D : F - E \text{ u. s. w.}$$

175. **Zusatz.** Wenn Zahlen harmonisch proportionirt sind, so sind es auch die Produkte oder Quotienten, die man erhält,

wenn man alle jene Zahlen durch eine und dieselbe Zahl multiplicirt oder dividirt.

177. Lehrsatz. In allen harmonischen Reihen verhält sich stets das Produkt aus den beiden ersten Gliedern zu dem Produkt aus den beiden letzten wie der Unterschied der beiden ersten zum Unterschiede der beiden letzten.

Beweis. Wenn
$$\begin{aligned} A : C &= B - A : C - B \\ B : D &= C - B : D - C \\ C : E &= D - C : E - D \\ D : F &= E - D : F - E \end{aligned}$$

so ist auch:
$$\left.\begin{aligned} AB : CD &= B - A : D - C \text{ und} \\ CD : EF &= D - C : F - E \end{aligned}\right\} (155)$$

folglich
$$AB : EF = B - A : F - E.$$

179. Lehrsatz. Ist Z das nte Glied, A das erste und B das zweite einer harmonischen Reihe, so ist:
$$Z = \frac{AB}{B - (n-1)(B-A)} = \frac{AB}{B + (n-1)(A-B)}.$$

Beweis. Es ist $A : C = B - A : C - B$, mithin ist das dritte Glied:
$$C = \frac{AB}{2A - B} = \frac{AB}{B + 2A - 2B} = \frac{AB}{B - 2(B-A)}; \text{ w. z. b. w. für}$$
drei Glieder.

Ferner ist $B : D = C - B : D - C$, mithin ist das vierte Glied:
$$D = \frac{BC}{2B - C} = \frac{B}{2B - \frac{AB}{2A-B}} \times \frac{AB}{2A - B} = \frac{AB^2}{4AB - 2B^2 - AB}$$
$$= \frac{AB}{3A - 2B} = \frac{AB}{B - 3(B-A)}; \text{ w. z. b. w. für vier Glieder.}$$

Ferner ist $C : E = D - C : E - D$, mithin das fünfte Glied
$$E = \frac{DC}{2C - D} \text{ oder:}$$
$$E = \frac{\frac{AB}{B - 3(B-A)} \times \frac{AB}{B - 2(B-A)}}{\frac{2AB}{B - 2(B-A)} - \frac{AB}{B - 3(B-A)}} =$$
$$\frac{A^2B^2}{AB[2B - 6(B-A) - B + 2(B-A)]} = \frac{AB}{B - 4(B-A)};$$

w. z. b. w. für fünf Glieder; und so fort; daher für das n te Glied:

$$Z = \frac{AB}{B-(n-1)(B-A)} = \frac{AB}{B+(n-1)(A-B)}.$$

179. Zusatz 1. Hieraus ergibt sich:

1) dass man jedes Glied einer harmonischen Reihe finden kann, sobald man die beiden ersten Glieder kennt und weiss, das wievielste in der Reihe das gesuchte Glied ist;

2) dass, wenn die beiden ersten Glieder und ein beliebiges drittes gegeben sind, man finden kann, das wievielste dieses letztere in der Reihe ist.

179. Zusatz 2. Hieraus ergibt sich, dass, wenn das zweite Glied grösser ist als das erste, also die Reihe eine steigende, man dieselbe nicht beliebig weit fortführen kann, da $B-(n-1)(B-A)$ zuletzt $= 0$ wird; dass jedoch, wenn $B < A$ oder die Reihe fallend ist, dieselbe beliebig weit fortgesetzt werden kann.

Wenn die Reihe eine steigende und der Unterschied $(B-A)$ der beiden ersten Glieder ein aliquoter Theil des zweiten Gliedes (B) ist, so ist die Reihe endlich oder begrenzt; denn alsdann wird $(n-1)(B-A)$ zuletzt $= B$, also der Nenner $B-(n-1)(B-A) = 0$, und der Bruch, von welchem diese Zahl der Nenner ist, kann nicht ausgedrückt werden.

Ist der Unterschied $B-A$ kein aliquoter Theil von B, so kann man doch zu einer Zahl gelangen, die so beschaffen ist, dass $B-m(B-A)$ noch kleiner als B und mithin der Nenner $B-m(B-A)$ noch positiv ist, dass aber $(m+1)(B-A)$ grösser als B und folglich der Nenner $B-(m+1)(B-A)$ negativ wird, wodurch das Glied $\frac{AB}{B-(m+1)(B-A)}$ und alle übrigen negativ werden. Es sei z. B. das erste Glied $A = 20$, das zweite Glied $B = 36$, so ist $B-A = 16$ und $AB = 720$, so sind die Glieder

der Reihe: $20, 36, \frac{720}{36-2.16}, \frac{720}{36-3.16}, \frac{720}{36-4.16}$ u. s. f.

oder: $20, 36, \frac{720}{4}, \frac{720}{-12}, \frac{720}{-28}, \frac{720}{-44}$

oder: $20, 36, 180, -60, -25\frac{5}{7}, -16\frac{4}{11}$ u. s. f.

Man hat alsdann z. B.

$$36 : -60 = 180 - 36 : -60 - 180 \text{ oder}$$
$$36 : -60 = 144 : -240 \text{ oder}$$
$$6 : -10 = 12 : -20.$$

Ebenso

$$
\begin{aligned}
180 : -25\tfrac{5}{7} &= 180-(-60) : -60-(-25\tfrac{5}{7}) \text{ oder} \\
180 : -\tfrac{180}{7} &= 180+60 : -60+25\tfrac{5}{7} \text{ oder} \\
7 : -1 &= 240 : -34\tfrac{2}{7} \text{ oder} \\
7 : -1 &= 240 : -\tfrac{240}{7} \text{ oder} \\
7 : -1 &= 7 : -1.
\end{aligned}
$$

180. Lehrsatz. Wenn man eine constante Grösse nach und nach durch die Glieder einer arithmetischen Reihe dividirt, so bilden die Quotienten eine harmonische Reihe.

Beweis. Aus 179 geht hervor, dass eine harmonische Reihe A, B, C, D E u. s. w. folgendermaassen ausgedrückt werden kann:

$$\frac{AB}{B},\ \frac{AB}{B+(A-B)},\ \frac{AB}{B+2(A-B)},\ \frac{AB}{B+3(A-B)},\ \frac{AB}{B+4(A-B)} \cdots\cdots \frac{AB}{B+(n-1)(A-B)}.$$

Nun ist aber AB eine constante Grösse, und B, $B+(A-B)$, $B+2(A-B)$, $B+3(A-B)$ ..... $B+(n-1)(A-B)$ bilden eine arithmetische Reihe (170).

180. Zusatz 1. Die Zahlen, welche das Umgekehrte (die reciproken Werthe) der Glieder einer arithmetischen Reihe sind, bilden eine harmonische Reihe.

180. Zusatz 2. Wenn man aus einer harmonischen Reihe Glieder herausnimmt, die gleichweit von einander entfernt sind, so bilden auch diese eine harmonische Reihe.

181. Lehrsatz. Wenn drei Zahlen eine arithmetische Proportion bilden, so sind die Produkte aus der ersten und zweiten, aus der ersten und dritten und aus der zweiten und dritten harmonisch proportionirt.

Beweis. Es ist $\div$ J, K, L, mithin

$$
\begin{aligned}
J+L &= 2K \\
J-L &= K-L, \\
\text{aber } JK:KL &= J:L \ (143), \\
\text{folglich } JK:KL &= J(K-L):L(J-K) \ (143) \text{ oder} \\
JK:KL &= JK-JL : JL-KL,
\end{aligned}
$$

also JK, JL, KL harmonisch proportionirt.

182. Lehrsatz. Nimmt man zwischen zwei Zahlen J, K das arithmetische Mittel (A) und die mittlere harmonische Proportionale (H), so bilden diese vier Zahlen eine geometrische Proportion, in welcher die beiden gegebenen die äussern und die beiden gefundenen die mittleren Glieder sind.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $A = \frac{J + K}{2}$

und $J : K = J - H \, . \, H - K$ oder

$$H = \frac{2KJ}{J + K},$$

aber $1 : J = K : KJ$ (143),

mithin $J + K : J = K : \frac{KJ}{J + K}$ (155, Zus. 2),

oder $\frac{J + K}{2} : J = K : \frac{2KJ}{J + K}$,

mithin $A : J = K : H$.

Aus dem vierten Buche,

handelnd

Von der Aehnlichkeit der Figuren etc.

192. Erklärung. Aehnliche Figuren nennt man diejenigen, in welchen die Winkel einzeln genommen einander gleich sind und die Seiten, welche gleiche Winkel einschliessen und gleichen Winkeln gegenüberstehen, einerlei Verhältniss zu einander haben.

193. Erklärung. Die Seiten, welche in ähnlichen Figuren gleiche Winkel einschliessen oder gleichen Winkeln gegenüberliegen, werden gleichgelegene oder entsprechende Seiten genannt.

195. Lehrsatz. Wenn man in einem Dreiecke (ADE Fig. 36.) eine Gerade (BC) parallel mit einer der Seiten (DE) zieht, so schneidet sie die beiden andern Seiten so, dass die Stücke der einen dasselbe Verhältniss zu einander haben als die Stücke der andern; und umgekehrt: wenn eine Gerade zwei Seiten eines Dreiecks so schneidet, dass die Stücke der einen dasselbe Verhältniss zu einander haben als die Stücke der andern, so ist sie paparallel der dritten.

Erster Beweis. Erster Fall. Wenn die Linien BA und BD ein gemeinschaftliches Maass, z. B. die Linie AZ, haben, alsdann wird die Linie AB dieses Maass etwa m Mal, die Linie BD n Mal enthalten, und man beweist aus Satz 63, dass, wenn ZQ ∥ DE, AC die Linie AQ auch m Mal und CE dieselbe n Mal

in sich schliesst, woraus nach 143 und 146 folgt, dass BA : BD = AC : CE.

Zweiter Fall. Wenn die Linien BA und BD kein gemeinschaftliches Maass haben, so sei AZ ein Maass von AB, welches AB m Mal enthalte, alsdann wird auch AQ m Mal in AC enthalten sein (63), und AZ werde mehr als n Mal und weniger als (n + 1) Mal in BD begriffen, so ist auch AQ mehr als n Mal und weniger als (n + 1) Mal in CE begriffen, und folglich, da $BA = m . AZ$; $AC = m . AQ$; $BD > n\ AZ$ und $< (n + 1) . AZ$; $CE > n . AQ$ und $< (n + 1) . AQ$; ist (148): $AB : BD = AC : CE$.

Das Umgekehrte wird aus der Ungereimtheit, in welche man durch Annahme des Gegentheils verfällt, bewiesen.

Zweiter Beweis. Man ziehe CD und BE, so ist $\triangle BCE = \triangle BCD$ (84); nun verhalten sich (200) die Dreiecke BCD und BAC wie ihre Grundlinien BD und BA, ebenso die Dreiecke BCE und BAC wie ihre Grundlinien CE und AC, woraus (144): $BA : BD = AC : CE$.

Das Umgekehrte wird aus der Ungereimtheit, in welche man durch Annahme des Gegentheils verfällt, bewiesen.

195. **Zusatz 1.** Die ganzen Seiten stehen in demselben Verhältniss zu einander, wie ihre Stücke.

195. **Zusatz 2.** Zieht man in einem Dreiecke zwischen zwei Seiten beliebig viele Parallelen mit der dritten, so haben die Stücke, in welche eine jener Seiten durch die Parallelen getheilt werden, dasselbe Verhältniss zu einander als die entsprechenden Stücke der andern.

196. **Lehrsatz.** Wenn die drei Winkel eines Dreiecks (ABC Fig. 37.) einzeln genommen gleich sind den drei Winkeln eines andern Dreiecks (CDE), (nämlich $\angle BAC = \angle DCE$, $\angle ABC = \angle CDE$, $\angle ACB = \angle CED$), so stehen die Seiten, welche in beiden Dreiecken gleiche Winkel einschliessen und gleichen Winkeln gegenüberliegen, in demselben Verhältniss.

Vorbereitung. Man stellt die beiden Dreiecke so neben einander, dass zwei gleichen Winkeln gegenüberliegende Seiten AC, CE eine einzige gerade Linie ausmachen, dann folgt aus 24, dass $CD \parallel AB$, $DE \parallel BC$; verlängert man hierauf AB und DE bis zu ihrem Durchschnitt in F und zieht $DG \parallel AE$, so ist (56) $BC = FD$, $BF = CD$, $GD = AC$.

Beweis. Aus 195.

196. **Zusatz 1.** Dreiecke, die gleiche Winkel haben, sind ähnlich.

196. Anmerkung 1. Zur Feststellung der Aehnlichkeit zweier Dreiecke genügt die Bedingung, dass zwei Winkel des einen einzeln gleich sind zweien Winkeln des andern.

196. **Zusatz 2.** Wenn zwei Dreiecke gleiche Winkel haben und mithin ähnlich sind, so sind die aus den Spitzen gleicher Winkel gefällten Höhenperpendikel in demselben Verhältniss als zwei entsprechende Seiten, und diese letzteren (nöthigenfalls verlängert) werden durch die Höhenperpendikel in proportionirte Stücke getheilt.

196. **Zusatz 3.** Nimmt man auf einer Linie (AE Fig. 20.) einen Punkt (A) und zieht aus zwei andern Punkten (C, E) zwei Linien (CB, ED) nach derselben Seite hin und zwar dergestalt, dass sie nicht nur parallel, sondern auch dasselbe Verhältniss zu einander haben, wie ihre Abstände von dem Punkte A (BC : DE = AC : AE), so liegen ihre Endpunkte (D, B) mit dem angenommenen (A) in einer geraden Linie.

197. **Lehrsatz.** Wenn die drei Seiten (AB, AC, BC Fig. 38.) eines Dreiecks (BAC) dasselbe Verhältniss zu einander haben als die drei Seiten (DE, DF, EF) eines andern Dreiecks (DEF), so sind in beiden Dreiecken diejenigen Winkel gleich, die von proportionirten Seiten eingeschlossen werden.

Vorbereitung. Man construire über DF ein Dreieck DGF, dessen Winkel einzeln denen des Dreiecks ABC gleich sind, nämlich: $\angle ABC = \angle DGF$, $\angle BAC = \angle DFG$, $\angle BCA = \angle FDG$.

Beweis. Aus Satz 196 wird die Proportionalität der Seiten in den Dreiecken DGF und ABC dargethan, alsdann aus der Voraussetzung und Satz 156 die Gleichheit der Seiten in den Dreiecken DGF und DEF, hierauf in diesen letztern Dreiecken nach Satz 50 die Gleichheit der Winkel, woraus endlich auch die Gleichheit der Winkel in den Dreiecken ABC und DEF folgt.

197. **Zusatz.** Zwei Dreiecke, deren Seiten proportionirt sind, sind ähnlich.

198. **Lehrsatz.** Wenn ein Winkel (A Fig 38.) eines Dreiecks (ABC) gleich ist einem Winkel (EDF) eines andern Dreiecks (EDF) und die Seiten, welche diese beiden Winkel einschliessen, proportionirt sind, so sind die andern Winkel des einen Dreiecks einzeln denen des andern gleich und mithin die Dreiecke ähnlich.

Vorbereitung. Man construirt über DF ein Dreieck DGF, welches dem Dreieck ABC ähnlich ist, und zwar so, dass $\angle FDG = \angle ACB$ und $\angle DFG = \angle BAC$.

Beweis. Aus der Voraussetzung und Satz 149 beweist man, dass $DE = FG$; alsdann mit Hülfe von 45, dass $\angle EFD = \angle FDE$, $\angle DEF = \angle DGF$ und hieraus die Behauptung des Lehrsatzes.

199. Lehrsatz. Sind zwei Dreiecke (ABC, DEF Fig. 38 und 39.) beide zugleich entweder rechtwinkelig oder stumpfwinkelig oder spitzwinkelig, und ist in den beiden letzten Fällen ein Winkel (C) des einen Dreiecks gleich einem Winkel (F) des andern, sind ferner zwei Seiten des einen Dreiecks, welche nicht den genannten Winkel, sondern einen der beiden andern einschliessen, proportionirt zweien eben einen solchen Winkel einschliessenden Seiten des andern Dreiecks, so sind die beiden übrigen Winkel des einen einzeln gleich den beiden übrigen des andern und mithin die Dreiecke ähnlich.

Erster Beweis. 1) Wenn beide Dreiecke rechtwinkelig sind. Es seien die Winkel B und E (Fig. 38.) Rechte und es sei $AB : AC = DE : DF$; man construire $\triangle DGE$ über DF dergestalt, dass es mit $\triangle ABC$ gleichwinkelig ist, nämlich: $\angle DFG = \angle BAC$, $\angle FDG = \angle BCA$, $\angle DGF = \angle ABC = R$. Nun beweist man aus 196 und 149, dass $DE = FG$, alsdann aus 46, dass $EF = DG$ sowie $\angle EFD = \angle FDG$ und $\angle EDF = \angle DFG$.

2) Wenn beide Dreiecke spitz- oder stumpfwinkelig sind. Es seien die Winkel B und E (Fig. 38.) zugleich entweder spitz, oder stumpf und $\angle ACB = \angle DFE$, sowie $AB : AC = DE : DF$. Man construire wieder wie in No. 1 das Dreieck DGF, so dass also $\angle DFG = \angle BAC$, woraus dann die Gleichheit von DE und FG und mit Hülfe von Satz 49 auch die Gleichheit von EF und DG, sowie der übrigen Winkel hergeleitet wird, u. s. w.

Zweiter Beweis. Man lege das kleinere Dreieck DEF (Fig. 39.) so auf das grössere, dass die gleichen Winkel ACB und DFE mit ihren Scheiteln zusammenfallen und die Schenkel des einen längs den Schenkeln des andern zu liegen kommen; so dass also $CG = EF$ und $CH = DF$ ist. Es sei $AB : BC = DE : EF$; es seien ferner die Winkel BCA und EDF entweder Rechte oder einander gleich und dann die Winkel bei B und E, wenn sie dies nicht sind, beide stumpf oder beide spitz. Wäre nun $\angle HGC$ oder $\angle DEF$ nicht $= \angle ABC$, so sei $\angle CGJ = \angle ABC$, dann folgte

aus der Voraussetzung und 196, dass GJ = GH, daher $\angle$ GJH = $\angle$ GHJ. Ist nun $\angle$ BAC spitz, so soll nach der Voraussetzung auch $\angle$ EDF oder $\angle$ GHC spitz sein, dann ist aber $\angle$ GHJ stumpf, folglich auch $\angle$ GJH und, weil GJ ‖ AB, $\angle$ BAC stumpf, was der Voraussetzung widerspricht.

200. Lehrsatz Dreiecke (ABC, ACD Fig. 40.), welche dieselbe Höhe, aber verschiedene Grundlinien haben, haben dasselbe Verhältniss zu einander, wie diese Grundlinien; und umgekehrt. Dasselbe findet auch Statt bei Parallelogrammen.

Vorbereitung. Man verlängere die Grundlinien BC und CD, nehme auf der Verlängerung so viele Stücke BE, EF, GF = BC einerseits, als andererseits DH, HJ, JK = CD und ziehe die Linien AE, AF, AG, AH, AJ, AK.

Beweis. Aus 84, Zus. 3 und 148.

Die Umkehrung wird indirekt bewiesen durch Annahme des Gegentheils der Behauptung.

201. Lehrsatz. Wenn Parallelogramme oder Dreiecke auf gleichen Grundlinien stehen, so sind sie in demselben Verhältniss wie ihre Höhen.

Beweis. Aus 200, indem man über der Grundlinie eines jeden Parallelogramms oder Dreiecks ein ihm gleiches Rechteck oder rechtwinkeliges Dreieck construirt und nun die Grundlinie als Höhe betrachtet.

202. Lehrsatz. Parallelogramme (AD, GK Fig. 41.) oder Dreiecke, welche verschiedene Grundlinien und verschiedene Höhen haben, stehen zu einander im zusammengesetzten Verhältniss der Grundlinien und Höhen

Vorbereitung. Man verwandle die Parallelogramme GK und AD in die Rechtecke MK und FD, lege dann das kleinere MK so auf das grössere FD, dass sie einen Winkel (bei C) gemeinschaftlich haben, und verlängere HK bis N.

Beweis. Aus 200, angewandt auf die Rechtecke MK und FK, sowie FK und FD und hieraus (155) die Behauptung des Lehrsatzes.

202. Zusatz 2. Wenn Parallelogramme oder Dreiecke gleiche Winkel haben, so stehen sie zu einander im zusammengesetzten Verhältniss der gleiche Winkel einschliessenden und gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten.

202. Zusatz 3. Wenn zwei Parallelogramme oder zwei

Dreiecke gleich sind, so stehen die Grundlinien im umgekehrten Verhältniss der Höhen; und umgekehrt.

202. Zusatz 4. Wenn zwei Parallelogramme oder zwei Dreiecke gleich sind und zudem einen gleichen Winkel haben, so stehen die diesen Winkel einschliessenden Seiten des einen im umgekehrten Verhältniss zu eben den Seiten des andern; und umgekehrt.

202. Zusatz 5. In allen Rechtecken, die gleich sind, stehen die Grundlinien im umgekehrten Verhältniss zu den Höhen; und umgekehrt: Sind vier Linien proportionirt, so ist das Rechteck aus den beiden äusseren gleich dem Rechteck aus den beiden mittleren.

202. Zusatz 6. Wenn drei Linien stetig proportionirt sind, so ist das Quadrat der mittelsten gleich dem Rechteck aus den beiden äussern.

203. Lehrsatz. Wenn die Grundlinie (AD Fig. 41.) eines Parallelogramms (oder Rechtecks) die Grundlinie (LK) eines andern m Mal und die Höhe (DE) des erstern die Höhe (HK) des letztern n Mal in sich fasst, so ist ||gr HK : ||gr AD $= 1 : m \times n$ und mithin, wenn man ||gr HK gleich der Einheit setzt und als Maass annimmt, die Zahl, welche den Inhalt von ||gr AD ausdrückt $= m \times n$, d. h. das Parallelogramm AD schliesst so viele Parallelogramme, die gleich □HK, in sich, als die Zahl $m \times n$ Einheiten enthält.

Beweis. Aus 202.

203. Zusatz 2. Das Produkt zweier Linien drückt das aus ihnen construirte Rechteck aus.

203. Zusatz 3. Wenn vier Linien proportionirt sind, so ist das Rechteck aus den beiden äussern gleich dem Rechteck aus den beiden mittleren; wie dies in 202, Zus. 5 aus andern Gründen gezeigt wurde.

203. Zusatz 4. Wenn drei Linien proportionirt sind, so ist das Quadrat der mittleren gleich dem Rechteck aus den beiden äussern; wie dies in 202, Zus. 2 aus andern Gründen gezeigt wurde.

203. Zusatz 5. Der Inhalt eines Parallelogramms kann ausgedrückt werden durch das Produkt aus der Grundlinie und Höhe.

Ebenso kann man den Inhalt eines Quadrates durch die zweite Potenz oder das Quadrat seiner Seite ausdrücken.

203. Zusatz 6. Der Inhalt eines Dreiecks kann ausgedrückt werden durch das Produkt aus der Grundlinie und der

halben Höhe, oder durch das Produkt aus der Höhe und der halben Grundlinie; mit einem Wort durch das halbe Produkt aus Grundlinie und Höhe.

203 Zusatz 7. Der Inhalt eines regelmässigen Vielecks wird dargestellt durch das halbe Prodnkt ans dem Umfange nnd dem Perpendikel.

203. Zusatz 8. Der Inhalt eines rechtwinkeligen (Parallel-) Trapezes wird ausgedrückt durch das Produkt aus der zwischen den rechten Winkeln liegenden Seite und der halben Summe der Rechtecks- (parallelen) Seiten oder, was auf dasselbe hinansläuft, dem arithmetischen Mittel zwischen den Rechtecksseiten.

203. Zusatz 9. Ein Rechteck auf eine gegebene Linie zu stellen, d. h. über einer gegebenen Linie ein Rechteck zu construiren, welches einem gegebenen Rechteck oder Quadrat gleich ist, kommt eigentlich überein mit dem Finden eines Quotienten, den man erhält, wenn man das Produkt zweier Zahlen durch eine gegebene dritte Zahl dividirt; immerhin kommt es darauf hinaus: eine Linie zu finden, die mit einer gegebenen Linie ein Rechteck bildet, welches einem gegebenen Rechtecke gleich ist.

203. Zusatz 10. Bezeichnet man die Flächenräume zweier Parallelogramme oder Dreiecke durch J und i, die Grundlinien durch B und b, die Höhen durch H und h, so ist der Hauptsatz:

$$J : i = B \times H : b \times h;$$ hieraus folgt:

1) Ist die Grundlinie zur Grundlinie oder die Höhe zur Höhe, aber nicht beide zugleich, incommensurabel, so sind es auch die Flächenränme J und i zu einander (130, Zus. 1.).

2) Wenn sowohl Höhen als Grundlinien beider Parallelogramme incommensurabel zu einander sind, kann das Verhältniss der Flächenräume (J : i) commensurabel sein.

Dies ist z. B. der Fall, wenn man über der Diagonale und über der Seite eines Quadrates Quadrate beschreibt.

3) Wenn Quadrate über Linien beschrieben werden, die incommensurabel zu einander sind, so verhalten sich ihre Flächenräume, d. i. die Quadrate selbst nicht zu einander wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, d. h. wie zwei Zahlen, aus denen man die Wurzeln ziehen kann.

4) Quadrate können incommensurabel zu einander sein; denn es sei (Fig. 42.) AF incommensurabel zu FD, z. B. wie $\sqrt{15} : 2$; man bestimme zwischen beiden die mittlere Proportionale FB, so ist:

4*

$FB_q = 2\sqrt{15} = \sqrt{60}$; daher $FB_q : FD_q = \sqrt{60} : 4 = \sqrt{15} : 2$ und $FB_q : AF_q = \sqrt{60} : \sqrt{15}$.

FB_q ist also incommensurabel zu FD_q, aber commensurabel zu AF_q, denn $\sqrt{60} : \sqrt{15} = 2 : 1$.

Es gibt also zu einander incommensurable Quadrate; es gibt zu einander incommensurable Linien, deren Quadrate jedoch commensurabel sind, und es gibt zu einander incommensurable Linien, deren Quadrate es gleichfalls sind.

203. Zusatz 11. Aus den vorhergehenden Zusätzen, besonders aus dem vierten, geht ferner hervor, dass man alle Verhältnisse, wie zusammengesetzt sie auch sein mögen, stets durch das Verhältniss von zwei geraden Linien ausdrücken kann. Es sei $M : N = A \times B \times C : D \times E \times F$, so können die einfachen Verhältnisse $A : D$, $B : E$, $C : F$ stets durch gerade Linien ausgedrückt werden, dieselben mögen commensurabel oder incommensurabel zu einander sein.

Man nehme an, es sei P die mittlere Proportionale zwischen A und B; Q die zwischen D und E, und R die dritte Proportionale zu P und Q, so ist:

$$P_q = A_r B,$$
$$Q_q = D_r E, \text{ mithin}$$
$$P_q : Q_q = A \times B : D \times E, \text{ aber}$$
$$P : Q = Q : R, \text{ folglich (160, Zus. 4)}$$
$$P_q : Q_q = P : R, \text{ mithin}$$
$$P : R = A \times B : D \times E \text{ und}$$
$$M : N = P \times C : R \times F.$$

Ist nun S die mittlere Proportionale zwischen P und C; T die zwischen R und F und U die dritte Proportionale zu S und T, so ist:

$$S_q : T_q = P \times C : R \times F, \text{ aber}$$
$$S_q : T_q = S : U, \text{ mithin}$$
$$M : N = S : U$$ und auf diese Weise für alle möglichen Fälle.

204. Lehrsatz. In ähnlichen Dreiecken (BAC, CDF Fig. 43.) sind die Rechtecke, die aus vier entsprechenden Seiten, dieselben in verkehrter Ordnung genommen, gebildet werden, gleich (nämlich $AC_r EF = DF_r BC$).

Beweis. Aus 196 und 202, Zus. 5.

205. Lehrsatz. Aehnliche Dreiecke stehen in demselben Verhältniss zu einander, wie die Quadrate ihrer entsprechenden

Seiten oder mit andern Worten: sie stehen im zweifach hohen Verhältniss ihrer entsprechenden Seiten.

Vorbereitung. Man fälle auf zwei gleichgelegene Seiten AC, DF (Fig. 43.) die Höhenperpendikel BG, EH aus den Gegenecken.

Beweis. Aus 202 und 196, Zus. 2 oder ohne Vorbereitung aus 202, Zus. 2, 196 und 156, Zus. 2.

206. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie (BD Fig. 44.) einen Winkel (CBA) eines Dreiecks (ABC) halbirt und bis zur Gegenseite (AC) des Winkels verlängert wird, so verhalten sich die durch die gerade Linie gebildeten Stücke (AD, CD) dieser Gegenseite wie die angrenzenden Seiten (AB, BC) des Dreiecks, und das Quadrat der geraden Linie (BD) mit dem Rechteck aus den genannten Stücken der Gegenseite des halbirten Winkels zusammengenommen ist gleich dem Rechteck aus den beiden andern Seiten (BA, BC).

Erster Theil. Vorbereitung. Man verlängere AB und ziehe CE $\parallel$ BD.

Beweis. Nach 24 und 25 ist $\angle ECB = \angle CEB$, folglich (52) EB = CB und hieraus ergibt sich die Behauptung des Lehrsatzes mit Hülfe von Satz 195.

Zweiter Theil. Vorbereitung. Man mache $\angle DAF = \angle ABF$, verlängere BD bis F und ziehe CF.

Beweis. Aus der Voraussetzung und der Vorbereitung beweist man mit Hülfe von 196, Zus. 1, dass: $\triangle ABF \sim \triangle DAF \sim \triangle DBC$; das Uebrige aus 204, 72, Zus. 2.

206. Zusatz 1. $AD + DC$ oder $AC : AD = AB + BC : AB$, d. h. es verhält sich die Gegenseite des halbirten Winkels zu einem ihrer Abschnitte, wie die Summe der beiden andern Seiten zu der dem genannten Abschnitte anliegenden Seite.

206. Anmerkung 1. Der erste Theil des vorstehenden Lehrsatzes gilt auch für den Aussenwinkel, wenn die Winkelhalbirende die (verlängerte) Gegenseite überhaupt trifft, was z. B. nicht der Fall ist, wenn der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks halbirt wird, wo alsdann die Winkelhalbirende der Grundlinie parallel ist. Der zweite Theil, für den Fall, dass die Winkelhalbirende die (verlängerte) Gegenseite trifft, heisst folgendermaassen: Der Unterschied zwischen dem Quadrat der winkelhalbirenden Linie und dem Rechteck aus den durch diese letztere gebildeten Stücken der verlängerten Gegenseite vom halbirten Winkel ist gleich dem Rechteck aus den beiden übrigen Seiten.

Der erste und zweite Theil unseres Satzes, sowohl für einen innern, als als auch für einen äussern Winkel zusammengefasst, lauten allgemein:

Wenn eine Gerade einen Winkel eines Dreiecks, sei es einen innern oder einen äussern, halbirt und, hinreichend verlängert, die Gegenseite des halbirten Winkels trifft, so verhalten sich die Stücke dieser Gegenseite, in welche sie durch die Winkelhalbirende getheilt wird, wie die angrenzenden Seiten des Dreiecks, und die Summe oder der Unterschied des Quadrates der Winkelhalbirenden und des Rechtecks aus den genannten Stücken der Gegenseite des halbirten Winkels ist gleich dem Rechteck aus den beiden andern Seiten, und zwar die Summe, wenn ein innerer, der Unterschied, wenn ein äusserer Winkel halbirt worden ist.

207. Lehrsatz. Die Geraden (CE, AF Fig. 45), die aus zwei Seiten (C und A) eines Dreiecks (CAG) nach den Halbirungspunkten der Gegenseiten (AG und CG) gezogen werden, schneiden sich in einem Punkte dergestalt, dass das zwischen der Spitze und dem Punkte enthaltene Segment einer jeden zwei Drittheile von ihr beträgt; und zieht man durch diesen Punkt aus der dritten Dreiecksspitze nach der gegenüberliegenden Seite eine Gerade, so halbirt diese die Seite ebenfalls; so dass die drei Geraden, welche man aus den drei Spitzen nach den Halbirungspunkten der Gegenseiten zieht, sich in einem Punkte so schneiden, dass letzterer von jeder zwei Drittheile ihrer eigenen Länge von der Spitze aus abschneidet.

Vorbereitung für den ersten Theil. Man ziehe FY ∥ AG.

Beweis. Man beweist (24 und 196), dass $FY = \frac{1}{2} EG = \frac{1}{2} AE$ und aus 25 und 196 die Aehnlichkeit der Dreiecke ADE und DFY, wodurch man auch $DF = \frac{1}{2} AD$ erhält.

Vorbereitung für den zweiten Theil. Man ziehe FR ∥ AC.

Beweis. Wie im ersten Theil beweist man, dass $FR = \frac{1}{2} BC$ und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und DRF, dass $FR = \frac{1}{2} AB$, mithin also $BC = AB = \frac{1}{2} AC$.

208. Lehrsatz. Wenn man aus zwei Winkelspitzen (G, C Fig. 46.) eines Dreiecks Senkrechte (GB, CE) auf die Gegenseiten (CA, AG) fällt, so schneiden sich dieselben innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks in einem Punkte (D), jenachdem die Seiten, auf welche die Senkrechten gefällt worden sind, einen spitzen oder einen stumpfen Winkel einschliessen; zieht man ferner aus der dritten Winkelspitze (A) durch jenen Durchschnittspunkt eine Gerade (AF) nach der dritten Seite (CG), so steht auch sie auf dieser letzteren senkrecht.

Beweis. $\triangle CBD \sim \triangle CAE \sim \triangle GBA$, daher

$$CB : BD = BG : BA$$
oder $CB : BG = BD : BA$,

folglich, da die Winkel um B Rechte sind:

$$\triangle ABD \sim \triangle CBG \text{ (199), mithin}$$
$$\angle BAD = \angle DGF,$$
$$\angle BDA = \angle FDG,$$
also $\angle ABD = \angle DFG$,

mithin $\angle DFG = R$.

208. Zusatz 1. Die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

208. Zusatz 2. Ist das Dreieck rechtwinkelig, so ist jener Durchschnittspunkt die Spitze des rechten Winkels.

208. Zusatz 3. Wenn das Dreieck gleichseitig ist, so fallen dieser und der vorhergehende Lehrsatz zusammen, insofern die Höhenperpendikel gerade auch die Linien sind, welche die Seiten halbiren.

209. Lehrsatz. Fällt man in einem rechtwinkeligen Dreieck (ABC Fig. 47.) aus der Spitze (C) des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse, so theilt dasselbe das gegebene Dreieck in zwei Dreiecke (ACD, DBC), die untereinander und auch dem ganzen Dreiecke ähnlich sind.

Beweis. Aus 38, Zus. 2 und 196, Zus. 1.

209. Zusatz 1. Das Perpendikel ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

209. Zusatz 2. Jede Kathete ist die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem der Kathete angrenzenden Abschnitte derselben.

209. Zusatz 3. Aus dem ersten und zweiten Zusatz verbunden mit 202, Zus. 5 ist:

$$DC_q = AD_r DB,$$
$$CB_q = AB_r DB,$$
mithin $DC_q : CB_q = AD : AB$.

209. Zusatz 4. Verlängert man das Perpendikel CD, bis es die auf AC in A errichtete Senkrechte AF in F schneidet, so sind AD und CD mittlere Proportionalen zwischen DF und DB, denn es ist: $DF : AD = AD : DC = DC : BD$.

209. Zusatz 5. Wenn man auf AB in B die bis zum Durchschnitt J mit der verlängerten AC verlängerte Senkrechte BJ errichtet, alsdann auf AJ in J die Senkrechte JL errichtet

und so weit verlängert, bis sie die verlängerte AB in L schneidet, so sind AB und AJ zwei mittlere Proportionalen zwischen AC und AL; denn es ist $AC : AB = AB : AJ = AJ : AL$.

210. Erklärung. Man sagt, eine Linie sei nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten, wenn sich die ganze Linie zum grösseren Stück verhält, wie dieses letztere zum kleineren.

211. Lehrsatz. Wenn eine Gerade (L) nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten ist, und man verlängert sie um die Länge des grössern Abschnittes (G), so ist die ganze so erhaltene Linie (L + G) nach eben jenem Verhältniss geschnitten, so zwar, dass die gegebene Linie (L) den grössern Abschnitt bildet.

Beweis. Wenn K der kleinere Abschnitt ist, so ist:

$$L : G = G : K \quad (210),$$

mithin $L + G : G + K = L : G$

oder $L + G : L = L : G$.

213. Lehrsatz. Wenn eine Gerade nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten ist, so potenzirt ihre Hälfte zusammen mit dem grössern Abschnitt das fünffache Quadrat von der Hälfte. (Fig. 48.)

Beweis. Es ist $BD_rBH = BH_q + BH_rDH$ (72, Zus. 2),

$BH_q = BD_rDH$ (Vorauss.)

$= DH_q + BH_rDH$ (72),

also $BH_q + BD_rBH = BH_q + 2BH_rDH + DH_q$

$= BD_q$ (74)

oder $BH_q + 2.\tfrac{1}{2}BD_rBH = BD_q$, daher auch

$BH_q + 2.\tfrac{1}{2}BD_rBH + (\tfrac{1}{2}BD)_q = BD_q + (\tfrac{1}{2}BD)_q$

oder $(BH + \tfrac{1}{2}BD)_q = 5(\tfrac{1}{2}BD)_q$.

214. Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten ist, so sind die Abschnitte zu einander und zur ganzen Linie incommensurabel, und jeder Abschnitt wird Apotome genannt. (Fig. 48.)

Beweis. Es sei BD in H nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten und in J halbirt, so ist

$BH_q = BD_rDH$ (202, Zus. 6),

$BH_q = (BD - DH)_q = BD_q - 2BD_rDH + DH_q$,

also $BD_q - 2BD_rDH + DH_q = BD_rDH$, mithin

$$BD_q - 2BD_rDH + DH_q + 5DJ_q = BD_rDH + 5DJ_q$$

oder:

$$BD_q - 3BD_rDH + DH_q + 5DJ_q = 5DJ_q,$$

oder: $9DJ_q - 6BJ_rDH + DH_q = 5DJ_q$,
oder: $(3DJ - DH)_q = 5DJ_q$, mithin
$3DJ - DH =$ der Linie, deren Quadrat $= 5DJ_q$
oder: $= DJ\sqrt{5}$
oder: $BH + DJ = DJ\sqrt{5}$, also
$BH = DJ\sqrt{5} - DJ$
$= DJ(\sqrt{5} - 1)$
$= \frac{BD}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Ferner hat man aus $3DJ - DH = DJ\sqrt{5}$:

$$DH = 3DJ - DJ\sqrt{5} = \tfrac{3}{2}BD - \tfrac{1}{2}BD\sqrt{5} = \frac{BD}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Mithin BH und DK zu einander und zu BD incommensurabel.

215. **Lehrsatz.** Wenn eine gerade Linie (KJ Fig. 49.), in zwei Abschnitte (BK, BJ) getheilt, das fünffache Quadrat eines derselben (BK) potenzirt und man theilt die doppelte Länge (BD) eben dieses Abschnittes nach dem äussern und mittlern Verhältniss, so ist das grössere Stück gleich dem zweiten Abschnitte (BJ) der gegebenen Geraden (KJ).

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $KJ = BK\sqrt{5}$. Nun ist $BJ = KJ - BK = BK\sqrt{5} - BK = BK(\sqrt{5} - 1)$. Ist aber $BD = 2BK$ (Vorauss.) nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten, so ist der grössere Abschnitt $= \frac{BD}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (214)
$= BK(\sqrt{5} - 1)$,
also der grössere Abschnitt $= BJ$.

216. **Lehrsatz.** Wenn eine Gerade (L) nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten ist, so potenzirt der kleinere Abschnitt (K) zusammen mit der Hälfte des grössern (G) das fünffache Quadrat von der Hälfte des grössern Abschnittes.

Beweis. $G = \frac{1}{2}L(\sqrt{5} - 1)$ und $K = \frac{1}{2}L(3 - \sqrt{5})$ (214),
also $K : G = \frac{1}{2}L(3 - \sqrt{5}) : \frac{1}{2}L(\sqrt{5} - 1)$,
daher $K : G = 3 - \sqrt{5} : \sqrt{5} - 1$ (150)
und folglich $K = \frac{G(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1}$, also

$$K + \tfrac{1}{2}G = \tfrac{1}{2}G\left[1 + \frac{2(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{5} - 1}\right] =$$

$$\tfrac{1}{2}G\left(\frac{\sqrt{5} - 1 + 6 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}\right) = \tfrac{1}{2}G.\frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \tfrac{1}{2}G.\sqrt{5}.$$

217. Lehrsatz. Wenn eine Gerade (L) nach dem äussern und mittlern Verhältniss geschnitten ist, so ist die Summe der Quadrate vom kleinern Abschnitt (K) und von der ganzen Linie (L) dreimal so gross als das Quadrat vom grössern Abschnitt (G).

Beweis. Es ist $K = \frac{1}{2}L(3-\sqrt{5})$ (214),

also $K_q = \frac{1}{4}L_q \times (3-\sqrt{5})^2$ und $K_q + L_q = L_q + \frac{1}{4}L_q(9-6\sqrt{5}+5)$

$$= \frac{1}{4}L_q(4+9-6\sqrt{5}+5)$$

$$= \frac{1}{4}L_q(18-6\sqrt{5}).$$

Aber $\frac{1}{2}L\sqrt{5} = G + \frac{1}{2}L$ (213), also auch

$$\tfrac{1}{2}L\sqrt{5} - \tfrac{1}{2}L = G \quad \text{oder}$$

$$\tfrac{1}{2}L(\sqrt{5}-1) = G, \text{ daher}$$

$$L = \frac{2G}{\sqrt{5}-1} \quad \text{und}$$

$$L_q = \frac{4G_q}{(\sqrt{5}-1)^2},$$

$$\text{folglich } K_q + L_q = \frac{G_q(18-6\sqrt{5})}{6-2\sqrt{5}} = 3G_q.$$

218. Lehrsatz. Wenn zwei Vielecke (M und N Fig. 50), die aus einer gleichen Anzahl Seiten bestehen, durch Diagonalen (AC, AD; FH, FJ), die man aus einer der Ecken (A und F) nach allen übrigen zieht, in Dreiecke (BAC, CAD, DAE und GFH, HFJ, JFK) getheilt werden, so sind die Vielecke ähnlich, wenn je zwei gleichgelegene Dreiecke ähnlich sind (nämlich △BAC ∾ △GFH, △CAD ∾ △HFJ, △DAF ∾ △JFK).

Beweis. Aus der Gleichheit der Winkel in den Dreiecken wird die Gleichheit der gleichgelegenen Winkel in beiden Vielecken bewiesen. Dies ist das erste Erforderliche.

Aus der Proportionalität der Seiten in den Dreiecken wird die Proportionalität der gleichgelegenen Seiten in den Vielecken abgeleitet. Dies ist das zweite Erforderliche.

218. Zusatz 1. Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, so sind es auch die Parallelogramme, welche zu Diagonalen entsprechende Seiten von jenen haben und mithin doppelt so gross als die Dreiecke sind; daher gilt Alles, was für ähnliche Dreiecke bewiesen ist, auch für ähnliche Parallelogramme.

218. Zusatz 2. Die Parallelogramme (HJ und FE Fig 27.), welche um die Diagonale eines Parallelogramms (AD) stehen, d. h. durch deren Ecken dieselbe hindurchgeht, sind unter einander und dem gegebenen ähnlich.

219. Lehrsatz. Aehnliche Vielecke (M und N Fig. 50.) werden durch gleichmässig gezogene Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt, und die Flächenräume dieser Vielecke verhalten sich zu einander wie die Quadrate gleichgelegener Seiten, oder stehen im zweifach hohen Verhältniss dieser Seiten.

Beweis. Für den ersten Theil aus 198.

Für den zweiten Theil aus der Betrachtung, dass die Vielecke sich zu einander verhalten wie die Summen ihrer Dreiecke, dass diese Dreiecke sich zu einander verhalten wie die Quadrate entsprechender Seiten und also wie die Quadrate entsprechender Vielecksseiten, woraus sich nach 158 die Wahrheit des Lehrsatzes ergibt.

219. Zusatz 1. Sind vier Linien proportionirt, so stehen die über ihnen beschriebenen Quadrate im zweifach hohen Verhältniss der Linien, und folglich kommt das geometrische Quadrat überein mit dem zweifach hohen Verhältniss; daher kann man die arithmetischen Quadrate oder zweiten Potenzen der Zahlen, welche die Längen von Linien ausdrücken, an Stelle der geometrischen Quadrate gebrauchen.

219. Zusatz 3. Sind drei Linien stetig proportionirt, so verhält sich die über der ersten beschriebene Figur zu der über der zweiten beschriebenen, welche jener ähnlich ist, wie die erste Linie zur dritten.

220. Lehrsatz. Sind vier Linien proportionirt, so stehen die über der ersten und zweiten gleichmässig beschriebenen und ähnlichen Figuren in demselben Verhältniss zu einander wie die über der dritten und vierten Linie gleichmässig beschriebenen und ähnlichen Figuren; und umgekehrt: stehen zwei ähnliche Figuren in demselben Verhältniss zu einander wie zwei andere ähnliche, so sind die gleichgelegenen Seiten, über denen die Figuren beschrieben sind, proportionirt.

Beweis. Erster Theil.

Vorbereitung. Es seien A, B, C, D die vier Linien; b sei die dritte Proportionale zu A und B, d die dritte Proportionale zu C und D.

Beweis. $\left.\begin{array}{l} A:B = B:b \\ C:D = D:d \end{array}\right\}$ (Vorbereitung),

also: $B:b = D:d$

und $A:C = b:d$

oder $A:b = C:d$,

aber: Figur über A : Figur über B $=$ A : b
Figur über C : Figur über D $=$ C : d (219),

mithin: Figur über A : Figur über B $=$ Figur üb. C : Figur üb. D.

Zweiter Theil.

Vorbereitung. Es sei d die vierte Proportionale zu A, B, C.

Beweis. Da $A : B = C : d$, so ist

$A_q : B_q = C_q : d_q$

und $A_q : B_q = C_q : D_q$ (219),

mithin $d_q = D_q$ und $d = D$,

daher $A : B = C : D$.

221. Lehrsatz. In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist die über der Hypotenuse beliebig beschriebene Figur gleich den über den Katheten gleichmässig beschriebenen und jener ähnlichen Figuren zusammengenommen. (Fig. 51.)

Beweis. Aus 219, 153, 219, 87, 156.

222. Lehrsatz. Alle regelmässigen Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, und ihre Flächenräume verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten, oder ihrer Radien, oder ihrer Perpendikel, oder sie stehen im zweifach hohen Verhältniss der Seiten, Radien oder Perpendikel.

Beweis. Erster Theil. Aus 218 und der Beschaffenheit ähnlicher Vielecke.

Zweiter Theil. Aus 219 und 205.

222. Zusatz. Daher sind die Vielecke, denen wir in 113 und 115 Erwähnung gethan haben (siehe Fig. 33 u. 34.), den Vielecken, in welchen sie stehen, ähnlich, und in dem in Satz 116 (Fig. 35.) gedachten Falle ist das Vieleck EFGJL dem Umfange und Inhalte nach das kleinstmögliche, oder ein Minimum, wenn die Punkte E, F, G, J, L die Halbirungspunkte der Seiten (AD, DC, CB, BQ, QA) des umschriebenen Vielecks ADCBQ sind; denn alsdann steht der Radius OE senkrecht auf AD und ist mithin die kürzeste Linie.

223. Lehrsatz. Die Umfänge regelmässiger Vielecke, welche zwar eine gleiche Anzahl Seiten haben, aber über ungleichen Linien beschrieben sind, verhalten sich zu einander wie ihre Halbmesser, oder wie ihre Perpendikel.

Beweis. Aus 202, Zus. 2 und 196.

223. Zusatz. In allen regelmässigen Vielecken von gleich

viel Seiten ist das Verhältniss des Umfanges zum Perpendikel, oder zum Radius stets dasselbe.

224. Lehrsatz. Verschiedenartige regelmässige Vielecke stehen im zusammengesetzten Verhältniss ihrer Umfänge und Perpendikel.

Beweis. Aus 117 und 202.

*224. Zusatz. Wenn daher die Umfänge gleich sind, so verhalten sich die Flächenräume wie die Perpendikel; und wenn die Flächenräume gleich sind, so verhalten sich die Umfänge umgekehrt wie die Perpendikel.

227. Wenn man aus den Endpunkten (H, K Fig. 52.) der Seite (KH) eines regelmässigen Fünfecks gerade Linien (HC, KE) nach den Endpunkten der angrenzenden Seiten (KC, HE) zieht, so wird durch diese gezogenen Geraden

1) das Fünfeck zerlegt in eine Raute (CBEx), in zwei gleichschenkelige Dreiecke (KxC, HxE), deren Schenkel gleich den Seiten des Fünfecks sind, und in ein drittes gleichschenkeliges Dreieck (KxH), dessen Grundlinie die erwähnte Seite des Fünfecks ist.

2) Die genannten Geraden (HC, KE) schneiden sich gegenseitig nach dem äussern und mittlern Verhältniss, und ist der grössere Abschnitt gleich der Seite des Fünfecks.

3) Zieht man aus jeder Ecke gerade Linien nach allen übrigen Ecken, so wird jede dieser Diagonalen dergestalt von zwei anderen geschnitten, dass der grössere, durch eine derselben gebildete Abschnitt, durch die andere wieder nach dem äussern und mittleren Verhältniss geschnitten wird, und zwar ist das kleinere Stück dieses letzteren Schnittes dasjenige, welches zwischen den beiden Schneidenden enthalten ist.

4) Die Durchschnittspunkte sämmtlicher Diagonalen sind die Ecken eines neuen Fünfecks, welches denselben Mittelpunkt hat als das gegebene, diesem ähnlich, jedoch in Betreff seiner Lage umgekehrt gegen dasselbe ist, und dessen Seite sich zu der des gegebenen verhält, wie der kleinere Abschnitt einer durch eine Diagonale geschnittenen Diagonale zu dieser ganzen Diagonale.

Beweis. Erster Theil. Aus 104, Zus. 1, 38, 56, 57, 25.

Zweiter Theil. Aus 196 augewandt auf die Dreiecke KxH und KEH und aus 210.

Dritter Theil. Aus dem zweiten Theile, aus 153 und 211.

Vierter Theil. Dass das Vieleck ONvxy regelmässig ist,

erhellt aus der Congruenz der Dreiecke OBN, NEv, vHx, xKy, yCO; mithin ist dasselbe dem gegebenen ähnlich (222).

Dass beide Fünfecke denselben Mittelpunkt haben, geht daraus hervor, dass die Linien, die aus B und E senkrecht auf HK und CK gezogen werden, durch den Mittelpunkt des gegebenen Vielecks gehen, aber auch senkrecht auf ON und Nv, den Seiten des neuen Fünfecks, stehen, sowie durch die Punkte x und y, den Ecken desselben, und mithin auch durch seinen Mittelpunkt gehen.

Ferner ist $\triangle OBN \sim \triangle KBH$,

folglich $ON : KH = OB : BH$.

Aus dem fünften Buche,

handelnd

Vom Kreise.

228. Erklärung. Chorde oder Sehne eines Kreisbogens nennt man eine gerade Linie, welche, innerhalb des Kreises gezogen, nach beiden Seiten so weit verlängert ist, dass sie den Umkreis trifft und also einen Bogen spannt. Wenn eine solche Sehne durch den Mittelpunkt geht, führt sie den Namen Mittellinie oder Durchmesser, sie spannt auf beiden Seiten den halben Kreis und theilt mithin den Kreis in zwei gleiche Theile.

228. Zusatz. Eine Sehne spannt entweder beiderseits den halben Umkreis, wenn sie durch den Mittelpunkt geht, also ein Durchmesser ist, oder auf der einen Seite einen Bogen, welcher kleiner, und auf der andern Seite einen, welcher grösser als der halbe Umkreis ist, so dass beide Bögen zusammen den ganzen Umkreis ausmachen.

229. Erklärung. Wenn man aus einem Punkte des Umkreises zwei Sehnen nach den Endpunkten eines Durchmessers zieht, so spannt jede einen Bogen, und da diese Bögen zusammen stets den halben Umkreis ausmachen, so nennt man den einen das Supplement des andern.

230. Erklärung. Sector oder Kreisausschnitt nennt man ein Stück des Kreises, welches von zwei Halbmessern und dem Bogen begrenzt wird, nach dessen Endpunkten die Halbmesser auslaufen.

231. Erklärung. Man nennt Kreisabschnitt oder

Segment einen solchen Theil des Kreises, der zwischen einem Bogen und der denselben spannenden Sehne enthalten ist.

232. **Erklärung.** Von einem Winkel sagt man, er stehe in einem Kreisabschnitt, wenn sein Scheitel auf dem Bogen liegt und seine Schenkel durch die Endpunkte der den Bogen spannenden Sehne gehen.

234. **Erklärung.** Man sagt, ein Winkel stehe auf einem Bogen, wenn seine Schenkel durch die Endpunkte desselben gehen, und er heisst **Centriwinkel** oder **Peripheriewinkel**, jenachdem sein Scheitel im Mittelpunkte oder im Umkreise liegt.

234. **Zusatz 1.** Ein Peripheriewinkel, der also in einem Kreisabschnitte steht, steht immer auf einem Bogen, welcher mit dem dem Kreisabschnitte zugehörigen den ganzen Umkreis ausmacht.

234. **Zusatz 2.** Dieser Bogen (**auf** welchem nämlich der Peripheriewinkel steht) ist darum kleiner, ebensogross oder grösser als der halbe Umkreis, jenachdem der Kreisabschnitt, in welchem der Winkel steht, grösser, ebensogross oder kleiner als der halbe Umkreis ist.

235. **Erklärung.** **Berührende** oder **Tangente** eines Kreises nennt man eine Linie, welche den Kre's zwar trifft, jedoch verlängert ihn nicht schneidet.

236. **Erklärung.** Man sagt, dass zwei Kreise sich berühren, wenn sie einander treffen ohne sich zu schneiden. Die Berührung geschieht entweder von aussen, wenn der eine Kreis ganz ausserhalb des andern, oder von innen, wenn der eine ganz innerhalb des andern fällt.

237. **Grundsatz.** Kreise, welche mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, sind gleich.

238. **Grundsatz.** Der Durchmesser ist doppelt so gross als der Halbmesser.

239. **Grundsatz.** Wenn vom Mittelpunkte aus nach einem andern Punkte eine gerade Linie gezogen wird, die kürzer als der Halbmesser ist, so fällt der Punkt, sowie die ganze Linie innerhalb des Kreises.

240. **Lehrsatz.** Wenn man auf dem Umfange eines Kreises zwei Punkte (A, B Fig. 53.) nimmt und sie durch eine gerade Linie (AB) verbindet, so fällt diese letztere ganz innerhalb des Kreises.

Vorbereitung. Man ziehe vom Mittelpunkte eine be-

liebige gerade Linie CD nach AB, ziehe ferner die Halbmesser AC, BC.

Beweis. Aus 38, Zus. 2, 51, 41 und 239.

241. **Lehrsatz.** Wenn die Punkte (A, B, D Fig. 54.) nicht in gerader Linie liegen, so liegen sie stets im Umfange eines Kreises, oder mit anderen Worten: Man kann stets einen Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch die drei Punkte geht.

Vorbereitung. Man ziehe BD, BA, AD, halbire BD in K und AD in L, errichte auf BD in K und auf AD in L Senkrechte und verlängere sie, bis sie sich in C schneiden, ziehe BC, CD, CA, so ist zu beweisen, dass BC, CD, CA untereinander gleich und folglich Halbmesser eines Kreises sind, dessen Mittelpunkt der Punkt C ist.

Beweis. Aus 45.

241. **Zusatz.** Die Vorbereitung und der Beweis lehren folgende Eigenschaft der Dreiecke:

Die Senkrechten, die man auf den Seiten eines Dreiecks in ihren Halbirungspunkten errichtet, schneiden sich in **einem** Punkte, der entweder innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks liegt, und die Geraden, welche von ihm aus nach den Spitzen des Dreiecks gezogen werden, sind gleich.

242. **Lehrsatz.** Eine gerade Linie (BD Fig. 55.), welche auf einem Durchmesser in einem seiner Endpunkte senkrecht steht, fällt ganz ausserhalb des Kreises und trifft denselben nur in dem genannten Punkte, nämlich dem Endpunkte (B) des Durchmessers.

Beweis. Indirekt. Man nimmt nämlich an, die Linie BD hätte noch einen andern Punkt D mit dem Umkreise gemeinschaftlich. Man zieht CD, so dass CD ein Halbmesser des Kreises wäre; das Ungereimte folgt aus 41.

242. **Zusatz.** Eine Gerade, die einen Kreis berührt, berührt denselben nur in einem einzigen Punkte.

243. **Lehrsatz.** Eine Gerade (CB Fig. 55.), welche vom Mittelpunkte eines Kreises nach dem Berührungspunkte (B) einer Tangente (BD) desselben gezogen wird, steht senkrecht auf der letzteren; und umgekehrt: Eine Gerade, welche im Berührungspunkte einer Tangente senkrecht auf dieser steht, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis. Erster Theil. Aus 41 und zwar indirekt, durch

die Ungereimtheit, in die man durch die Annahme, dass eine andere Linie, z. B. CD, senkrecht auf BD stehe, verfällt.

Zweiter Theil. Indirekt aus dem ersten durch die Ungereimtheit, in die man durch die Annahme, dass eine andere Linie, z. B. BG, durch den Mittelpunkt gehe, verfällt.

243. Zusatz. Zwischen der Tangente und dem Umkreise kann keine Linie durch den Berührungspunkt gezogen werden, welche den Kreis nicht schnitte.

244. Lehrsatz. Ein Centriwinkel (GEF oder GEN Fig. 56.) ist doppelt so gross als ein Peripheriewinkel (GJF oder GJN), der mit ihm auf demselben Bogen (GF oder GN) steht.

Vorbereitung. Man ziehe aus dem Scheitel J den Durchmesser JEL.

Beweis. Aus 51 nnd 38 angewandt auf die Dreiecke JEF und JEG, sowie JEG nnd JEN, und zwar nimmt man die Summe oder den Unterschied einerseits der Winkel NEL und GEL, sowie EJN nnd EJG, andererseits der Winkel FJL und GJL, sowie FEL und GEL, jenachdem der Durchmesser JEL innerhalb oder ausserhalb der Schenkel des Winkels NEG oder FEG fällt.

244. Znsatz 1. Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, sind gleich.

244. Zusatz 2. Die Summe oder der Unterschied zweier Peripheriewinkel ist die Hälfte von der Snmme oder dem Unterschiede zweier Centriwinkel, die auf denselben Bögen stehen.

244. Zusatz 3. Die Summe zweier Peripheriewinkel, welche auf Bögen stehen, die zusammen den ganzen Umkreis ausmachen, ist gleich zwei Rechten, nnd die Summe der Winkel, die auf Bögen stehen, welche zusammen den halben Umkreis ausmachen, ist gleich einem Rechten; und umgekehrt.

244. Zusatz 4. Wenn vier (nicht in gerader Linie liegende) Punkte durch gerade Linien verbunden werden und von den so entstandenen Winkeln je zwei gegenüberliegende znsammen gleich zwei Rechten sind, so kann man stets einen Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch jene vier Punkte hindurchgeht.

245. Lehrsatz. In demselben oder in gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel, sie mögen alle Centriwinkel (FEG und GEN Fig. 56.), oder alle Peripheriewinkel (FJG und NJG) sein, auf gleichen Bögen; und umgekehrt.

Vorbereitnng. Man zieht die Sehnen FG und NG.

Beweis. Erster Theil. Aus 45 folgt, dass die beiden Sehnen FG und NG gleich sind, daher müssen sie, aufeinandergelegt, einander decken und mithin auch, wegen der Gleichheit der Halbmesser, die Bögen FG und NG und folglich diese einander gleich sein.

Zweiter Theil. Indirekt aus dem ersten.

245. Zusatz 1. Ein Peripherie- oder Centriwinkel, der auf einem Bogen steht, welcher das Zweifache, Dreifache u. s. w. eines andern Bogens in demselben oder in einem gleichen Kreise ist, ist das Zweifache, Dreifache u s. w. von einem Peripherie- oder Centriwinkel, welcher auf dem letzteren Bogen steht; und umgekehrt.

245. Zusatz 2. In demselben Kreise steht der grössere zweier Centri- oder Peripheriewinkel auf dem grösseren Bogen.

245. Zusatz 3. Ist der Centriwinkel ein Rechter, so steht er auf einem Bogen, der gleich dem vierten Theil des Umkreises ist.

245. Zusatz 4. Die Bögen, welche zwischen parallelen Sehnen enthalten sind, sind gleich; und umgekehrt.

245. Zusatz 5. Aus dem Beweise unseres Lehrsatzes geht hervor, dass, wenn in demselben Kreise zwei Sehnen gleich sind, dies auch von den Bögen, die sie spannen, gilt; und umgekehrt.

245. Zusatz 6. Aus dem Beweise folgt auch, dass von zwei ungleichen Bögen die Sehne des grössern grösser ist als die des kleinern.

246. Lehrsatz. Ein Winkel (ABD Fig. 57.), welcher im Halbkreise steht, ist gleich einem Rechten; ein Winkel (AGB), der in einem kleineren Kreisabschnitte steht, ist grösser als ein Rechter; ein Winkel (BAD), der in einem grössern Kreisabschnitte steht, ist kleiner als ein Rechter.

Vorbereitung. Man ziehe den Durchmesser FCE senkrecht zu AD, ziehe AF, FD und GD.

Beweis. Für den ersten Theil zeigt man aus 244 und 38, dass $\angle AFD = R$ und folglich (244, Zus. 1), dass auch $ABD = R$; für den zweiten Fall, dass $\angle AGB > \angle AGD$ und dass alle Peripheriewinkel, die auf dem Bogen AEB stehen $= \angle AGB$ sind; für den dritten Fall, dass $\angle BAD < \angle ABD$, und dass alle Peripheriewinkel, wie z. B. $\angle BGD$, welche auf dem Bogen BD stehen, $= \angle BAD$ sind.

247. Lehrsatz. Der Winkel (DAB oder DAF Fig. 58.), welchen eine Tangente (AB oder AF) mit einer Sehne (AD) bildet, die aus dem Berührungspunkte (A) der Tangente gezogen wird, ist gleich einem Peripheriewinkel (AED oder AHD), welcher auf der andern Seite der Sehne in dem von ihr gebildeten Kreisabschnitte (DEA oder DHA) steht.

Vorbereitung. Man ziehe den Durchmesser $ECA' \perp FAB$, ziehe EH.

Beweis. Aus der Betrachtung, dass $\angle EDA = R$ (246), daher auch $\angle EDA + \angle EAD = R$ (38, Zus. 3) $= \angle EAD + \angle DAB$. Für $\angle FAD$ aus der Betrachtung, dass $\angle FAD = R + \angle EAD$, dass $\angle EAD = \angle EHD$ (244, Zus. 1) und $\angle AHD = R + \angle EHD$ (246).

248. Lehrsatz. Wenn ein Durchmesser (BK Fig. 59.) eine Sehne (LH) halbirt, so schneidet er sie rechtwinkelig; und umgekehrt: Steht ein Durchmesser senkrecht auf einer Sehne, so halbirt er sie und auch ihren zugehörigen Bogen. Jedoch können sich zwei Sehnen (BF, AE) niemals dergestalt schneiden, dass sie sich gegenseitig halbiren.

Vorhereitung. Für den ersten Theil: Man ziehe LC, HC; für den zweiten Theil: Ziehe CG.

Beweis. Erster Theil aus 50; die Umkehrung aus 51 und 45.

Zweiter Theil. Aus der Ungereimtheit, in die man durch Annahme des Gegentheils verfällt, weil alsdann nach dem ersten Theile sowohl $\angle AGC$ als auch $\angle BGC$ Rechte sein müssten, was nicht möglich ist.

248 Zusatz. Wenn eine Sehne eine andere unter rechten Winkeln trifft und dieselbe gleichzeitig halbirt, so geht die erstere durch den Mittelpunkt und ist mithin ein Durchmesser.

249. Lehrsatz. Nimmt man innerhalb eines Kreises einen Punkt (A Fig. 60.), verschieden vom Mittelpunkte (C), und zieht von ihm aus beliebige gerade Linien (AB, AG, AD, AH) nach dem Umkreise, so findet Folgendes Statt:

1) Die grösste von allen ist diejenige (AD), welche durch den Mittelpunkt geht.

2) Die kleinste (AF) ist die Verlängerung der grössten über den gegebenen Punkt bis zum Umkreise; so dass also die kleinste und grösste zusammen einen Durchmesser ausmachen.

3) Die Linien (AG, AB) werden desto kleiner, je weiter sie vom Durchmesser abstehen oder vom Mittelpunkte entfernt sind.

4) Von demselben Punkte (A) aus können nicht mehr als zwei Linien (AG, AE) gezogen werden, die einander gleich sind, und zwar fällt die eine auf die eine, die andere auf die andere Seite des Durchmessers; sie bilden mit diesem gleiche Winkel (GAD und DAE) oder sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.

5) All' dasselbe (No. 2 ausgenommen) findet Statt, wenn der Punkt (A) im Umkreise selbst liegt.

Vorbereitung für 1 und 2. Man ziehe die Radien CG, CB, CD, CH.

Beweis. Aus 11 und 43.

Vorbereitung für 3. Man ziehe $CL \perp AG$ und $CO \perp AB$.

Beweis. Aus 47, angewandt auf $\triangle ABC$ und $\triangle AGC$; ferner aus 41, indem man zeigt, dass CN und mithin auch $CO > CL$.

Vorbereitung für 4. Man ziehe $GJE \perp AD$, ziehe AE und fälle $CM \perp AE$.

Beweis. In den Dreiecken GAJ und JAE ist $\angle GAD = \angle DAE$ (248 und 45). In den Dreiecken CAM und CAL ist $CM = CL$.

Dass ausser AE keine zweite Linie gezogen werden kann, die gleich AG ist, folgt aus 3.

No. 5 folgt von selbst.

249. Zusatz. Wenn von einem Punkte innerhalb des Kreises mehr als zwei Linien nach dem Umkreise gezogen werden können, die einander gleich sind, so ist jener Punkt der Mittelpunkt.

250. Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte (A Fig. 61.) ausserhalb eines Kreises gerade Linien nach dem Umkreise zieht, so findet Folgendes Statt:

1) Die längste von allen, welche den Kreis schneiden und theilweise innerhalb des Umkreises fallen, ist diejenige (AG), welche durch den Mittelpunkt geht; die übrigen werden desto kürzer, je grössere Winkel sie mit dem Durchmesser bilden, oder je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind.

2) Die kürzeste von allen, die blos bis an den Umkreis reichen, ist diejenige (AL), welche, verlängert, durch den Mittelpunkt geht; die übrigen werden desto länger, je grössere Winkel sie mit dem Durchmesser bilden, oder je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind.

3) Von demselben Punkte (A) aus kann man nur zwei Linien, sowohl von solchen, welche den Kreis schneiden, also theilweise innerhalb des Umkreises fallen, als auch von solchen, welche nur bis an den Umkreis reichen, also ganz ausserhalb des Kreises liegen, ziehen, die einander gleich; und zwar fällt die eine von ihnen auf die eine, die andere auf die andere Seite des Durchmessers, und beide sind gleich weit von demselben entfernt oder bilden gleiche Winkel mit ihm.

Vorbereitung für 1 und 2. Man ziehe die Halbmesser CK, CE, CP, CH, CD, CF; ferner $CM \perp DA$ und $CQ \perp FA$.

Beweis. $AG > AF$ (11 und 43); $AF > AD$ (47); $AL < AE$ (43); $AE < AK$ (44); $CM > CQ$ (41).

Vorbereitung für 3. Ziehe $DH \perp AG$; ziehe AH und fälle $CN \perp AH$.

Beweis. In den Dreiecken DAO und OAH ist $\angle GAD = \angle GAH$ und $HA = DA$ (248 und 45) und dann $CN = CM$ (46).

250. Zusatz 1. Von allen Sehnen, die sich in einem Kreise ziehen lassen, ist der Durchmesser die grösste.

250. Zusatz 2. Die Sehnen, welche vom Mittelpunkt gleich weit entfernt sind, sind gleich.

250. Zusatz 3. Von allen Linien, die bis an den ausgebogenen Theil des Umkreises reichen (d. h. ganz ausserhalb des Kreises liegen), ist die Tangente die grösste; die kleinste jedoch von denen, welche bis an den eingebogenen Theil des Umkreises reichen (d. h. den Kreis schneiden und theilweise innerhalb des Umfanges fallen).

250. Zusatz 4. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises können an denselben stets nur zwei Tangenten gezogen werden; dieselben sind einander gleich und die grössten von allen Linien, die bis an den Umkreis reichen, aber die kleinsten von denen, welche den Kreis schneiden und bis zum eingebogenen Theile des Umkreises gehen.

250. Zusatz 5. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises kann man blos zwei Linien nach demselben ziehen, die einander gleich sind.

251. Lehrsatz. Zwei Sehnen (AD, BE Fig. 62.), die sich beliebig schneiden, schneiden sich stets so, dass das Rechteck aus den Abschnitten (AF, FD) der einen gleich ist dem Rechteck aus den Abschnitten (BF, FE) der andern.

Erster Beweis. Aus der Eigenschaft der rechtwinkeligen Dreiecke entlehnt.

Vorbereitung. Man ziehe durch F den Durchmesser NCFG, ziehe CD und fälle CH ⊥ AD.

Beweis. In den Dreiecken CDH und CFH ist nach 248 und 87, Zus. 4: $CD_q - CF_q = HD_q - HF_q$,
woraus wegen der Gleichheit der Halbmesser CD, CN, CG und wegen 81 $NF_rFG = AF_rFD$ folgt, ebenso beweist man, dass $NF_rFG = BF_rFE$,

mithin $AF_rFD = BF_rFE$.

Zweiter Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Vorbereitung. Man ziehe AB und DE.

Beweis. Nach 244, Zus. 1 und 196 ist $\triangle ABF \sim \triangle FDE$, also $AF : BF = FE : FD$, daher wegen 202, Zus. 5 $AF_rFD = BF_rFE$.

251. Zusatz 1. Wenn zwei Sehnen sich schneiden, so verhält sich ein Abschnitt der einen zu einem Abschnitte der andern Sehne, wie der zweite Abschnitt dieser letzteren zum zweiten Abschnitt der ersteren.

251. Zusatz 2. Damit ein Kreis beschrieben werden könne, welcher durch vier gegebene Punkte hindurchgehe, müssen dieselben eine solche Lage haben, dass die Geraden, welche sie verbinden, sich durch ihren Durchschnitt gegenseitig in Stücke theilen, von denen das eine der einen sich zu einem der andern Geraden verhält, wie das zweite Stück dieser letztern zum zweiten der erstern.

252. Lehrsatz. Fällt man aus einem Punkte (B Fig. 63.) der Peripherie eine Senkrechte (BF) auf einen Durchmesser (AD), so ist das Quadrat derselben gleich dem Rechteck aus den beiden durch sie gebildeten Abschnitten (AF, FD) des Durchmessers, und mithin ist die Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den genannten Abschnitten.

Vorbereitung. Ziehe AB und BD.

Beweis. Aus 246, 209, 203, Zus. 4 und 209, Zus. 1.

252. Zusatz 1. Dieselbe Linie (BF), eine Senkrechte nämlich auf einen Durchmesser, ist stets so beschaffen, dass das Quadrat derselben gleich ist dem Unterschiede der Quadrate des Radius und des Stücks vom Durchmesser, welches zwischen dem Mittelpunkte und der Senkrechten enthalten ist, d. i. $BF_q = CD_q - CF_q$.

252. Zusatz 2. Der Hauptsatz und der erste Zusatz, dass nämlich $BF_q = AF_rFD = CD_q - CF_q$, sind auch umgekehrt wahr, und zwar lautet die Umkehrung: Ist eine Linie so beschaffen, dass für jeden Punkt derselben $BF_q = AF_rFD = CD_q - CF_q$, so ist die Linie der Umfang eines Kreises, von welchem AD der Durchmesser ist.

253. Lehrsatz. Wenn sich zwei Sehnen unter rechten Winkeln schneiden, so ist die Summe der Quadrate ihrer Segmente (AX, XE, DX, XF Fig. 64.) gleich dem Quadrat des Durchmessers.

Vorbereitung. Ziehe die Radien CD, CE, CF, CA, den Durchmesser DCG und fälle CH ⊥ DF, CK ⊥ AE.

Beweis. $DG_q = 4CD_q = DH_q + CH_q + FH_q + CH_q + CK_q + AK_q + CK_q$ (87)
$= 2FH_q + 2CK_q + 2EK_q + 2KX_q$
$= DX_q + XF_q + AX_q + EX_q$ (79).

254. Lehrsatz. Wenn man vom Endpunkte (A Fig. 65.) eines Durchmessers (AB) aus zwei oder mehrere Sehnen (AD, AE) zieht, so verhalten sich die Quadrate derselben wie die Stücke (AO, AP) des Durchmessers, welche zwischen dem Punkte, von welchem die Sehnen auslaufen, und den Fusspunkten der aus den Endpunkten der Sehnen auf den Durchmesser gefällten Perpendikel enthalten sind ($AD_q : AE_q = AO : AP$).

Vorbereitung. Ziehe BD, BE.

Beweis. Aus 246 und 209, Zus. 2.

256. Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte (A Fig. 61.) ausserhalb eines Kreises zwei oder mehrere gerade Linien nach dem Umkreise zieht, welche verlängert denselben schneiden, so sind die Rechtecke, aus jeder solchen (verlängerten) ganzen Linie und ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte gebildet, untereinander gleich.

Erster Beweis. Aus den Eigenschaften der rechtwinkeligen Dreiecke.

Vorbereitung. Man ziehe die Halbmesser CD, CF; ferner CM ⊥ AD und CQ ⊥ AF.

Beweis. In den rechtwinkeligen Dreiecken CAQ und CAM ist nach 87, Zus. 4: $AQ_q - QE_q = AM_q - MK_q$, woraus sich mit Hülfe von 81 und 248 das Uebrige ergiebt.

Zweiter Beweis. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Vorbereitung. Ziehe FD und EK.

Beweis. Man zeigt zuvörderst, dass $\triangle AFD \sim \triangle AEK$ (196), weil $\angle DAF$ beide gemeinschaftlich haben, und weil $\angle FDK + \angle FEK = 2R$ (244, Zus. 3) $= \angle FEK + \angle KEA$ (20), mithin also $\angle FDK = \angle KEA$. Aus der Aehnlichkeit der genannten Dreiecke hat man $AD : AF = AE : AK$ und folglich (203, Zus. 3) $AD_r AK = AF_r AE$.

256. Zusatz 1. Die Schneidenden werden durch den Umkreis im umgekehrten Verhältnisse geschnitten, d. i. $AF : AD = AK : AE$.

256. Zusatz 2. Wenn der äussere Abschnitt (AK) der einen Linie (AD) die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der andern (AH) ist, so ist auch der äussere Abschnitt (AP) der andern die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der ersteren.

256. Zusatz 3. Werden die beiden Linien dergestalt gezogen, dass sich der äussere Abschnitt der einen zu ihrem inneren verhält wie der innere Abschnitt der andern zum äussern derselben, so sind die äusseren Abschnitte der ersten und zweiten zwei mittlere Proportionalen zwischen den inneren Abschnitten der zweiten und ersten.

259. Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte (A Fig. 61.) ausserhalb eines Kreises eine Tangente (AB) und eine beliebige Schneidende (AF) an denselben zieht, so ist das Quadrat der Tangente gleich dem Rechteck aus der Schneidenden (AF) und ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte (AE); und umgekehrt.

Vorbereitung. Ziehe BE und BF.

Beweis. Aus 247, 196, 203, Zus. 3.

259. Zusatz 1. Die Tangente ist die mittlere Proportionale zwischen der Schneidenden und ihrem ausserhalb des Kreises liegenden Abschnitte.

259. Zusatz 2. Die zwei Tangenten, die man von einem Punkte an den Kreis ziehen kann, sind gleich.

260. Lehrsatz. Zieht man durch die Endpunkte (B, J Fig. 61.) einer Sehne (BJ), die nicht ein Durchmesser ist, zwei Tangenten (BA, JA) an einen Kreis und aus deren Durchschnittspunkt (A) eine beliebige Schneidende (AF), so wird dieselbe in ihren Durchschnittspunkten (E und S) mit dem Umkreise und jener Sehne harmonisch getheilt.

Vorbereitung. Ziehe den Durchmesser ALCG.

Beweis. Es ist $AB_q = AS_q + BS_r SJ$ (90 und 72)

$AB_q = AF_r AE$ (259).

Hieraus ergibt sich mit Hülfe der Sätze 251, 75 und 76: $AF_r SE = AE_r FS$ u. s. w.

261. Lehrsatz. Kreise, welche sich schneiden oder berühren, haben nicht denselben Mittelpunkt.

Beweis. Wenn sich die Kreise von aussen berühren, so ist der Beweis von selbst einleuchtend, da der eine Kreis ganz ausserhalb des andern liegt. Die beiden andern Fälle, wenn sich die Kreise schneiden oder von innen berühren, werden indirekt bewiesen, wobei man durch Annahme des Gegentheils der Behauptung auf eine Ungereimtheit in Betreff der Gleichheit der Radien stösst.

262. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich von innen oder von aussen berühren, so geht die Gerade, welche man durch die beiden Mittelpunkte zieht, auch durch den Berührungspunkt.

Beweis. Indirekt aus 43.

263. Lehrsatz. Ein Kreis berührt einen andern nur in einem Punkte.

Beweis. Indirekt aus 43.

263. Anmerkung. Berühren zwei Kreise sich von aussen, so ist die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich der Summe ihrer Halbmesser; berühren sie sich von innen, so ist diese Entfernung gleich dem Unterschiede der Halbmesser. Allgemein: Berühren sich zwei Kreise, so ist die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich der algebraischen Summe ihrer Halbmesser.

264. Lehrsatz. Zwei Kreise, die sich schneiden, schneiden sich in zwei Punkten, und zwar dergestalt, dass die sie verbindende Gerade senkrecht auf der Linie steht, welche durch die beiden Mittelpunkte geht, und durch diese letztere halbirt wird. In mehr als zwei Punkten können zwei Kreise einander nie schneiden.

Beweis. Erster Theil. Wenn die Kreise nur einen Punkt gemeinschaftlich hätten, so würden sie sich blos berühren; da sie sich aber schneiden, müssen sie wenigstens zwei Punkte miteinander gemein haben. Diese können nicht auf derselben Seite der Axe (der Geraden, welche die Mittelpunkte verbindet) liegen, weil sich alsdann von einem Punkte, der nicht der Mittelpunkt ist, zwei gleich lange Linien nach dem Umkreise ziehen liessen, die auf derselben Seite des Mittelpunkts lägen, was nicht möglich ist (249). Die Durchschnittspunkte fallen also auf verschiedene Seiten der Axe; dass durch diese die Verbindungslinie jener unter rechten Winkeln halbirt wird, folgt aus 50 und 45.

Zweiter Theil. Hätten die Kreise mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich, so müssten sie einen und denselben Mittelpunkt haben, was nicht möglich ist (261).

264. Anmerkung. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so ist die Entfernung ihrer Mittelpunkte kleiner als die Summe, aber grösser als der Unterschied ihrer Halbmesser.

265. Lehrsatz. Wenn zwei Kreise sich berühren, und man zieht durch den Berührungspunkt (C Fig. 66.) eine Schneidende (DCE) an beide Kreise, verbindet die Mittelpunkte (A, B) sowohl untereinander, als auch mit den Durchschnittspunkten (E, D) der Schneidenden, so sind die Centriwinkel (CAE, CBD), die solchergestalt entstehen, gleich.

Beweis. Aus 51 und 196 angewandt auf die Dreiecke ACE und BCD.

Aus dem sechsten Buche,

handelnd

Von den in und um den Kreis beschriebenen Vielecken.

266. Erklärung. Von einer Figur sagt man, sie stehe in einer andern oder sei in dieselbe beschrieben, wenn ihre Ecken auf den Seiten der letzteren liegen.

Daher heisst eine Figur in einem Kreise stehend oder in denselben beschrieben, wenn sein Umfang alle Seiten berührt.

267. Erklärung. Von einer Figur sagt man, sie stehe um eine andere oder sei um dieselbe beschrieben, wenn alle ihre Seiten durch die Ecken der letzteren hindurchgehen.

Daher heisst ein Kreis um eine Figur beschrieben, wenn sein Umfang durch alle ihre Ecken hindurchgeht; und eine Figur um einen Kreis beschrieben, wenn alle ihre Seiten den letzteren berühren.

270. Lehrsatz. Keine Figur kann in einen Kreis beschrieben werden, wenn es nicht innerhalb oder ausserhalb derselben einen Punkt von solcher Lage gibt, dass alle von ihm nach den Ecken gezogenen Geraden einander gleich sind.

Beweis. Erster Theil. Aus 266 und der Beschaffenheit des Kreises.

Zweiter Theil. Aus 267 und 243.

271: Lehrsatz. Keine Figur kann um einen Kreis beschrieben werden, wenn nicht, im Fall die Zahl ihrer Seiten eine gerade ist, die Summe der ersten, dritten, fünften, siebenten u. s. w. gleich ist der Summe von der zweiten, vierten, sechsten, achten u. s. w., im Fall die Zahl der Seiten eine ungerade, die Summe der ersten, dritten, fünften, siebenten u. s. w. gleich ist der Summe der zweiten, vierten, sechsten, achten u. s. w. zusammen mit dem Stück der letzten Seite, welches zwischen der ersten und dem Berührungspunkte enthalten ist.

Beweis. Aus 267 und 250, Zus. 4.

272. Lehrsatz. Es gibt kein Dreieck, welches nicht in und um einen Kreis beschrieben werden kann, und ebenso keines, in und um welches sich nicht ein Kreis beschreiben lässt.

Beweis. Erster Theil. Die Beschreibung eines Dreiecks in einen Kreis und eines Kreises um ein Dreieck folgt aus 241.

Zweiter Theil. Die Beschreibung des Dreiecks um den Kreis.

Vorbereitung. Man halbire die Winkel ABD und ADB (Fig. 67.); verlängere die Halbirenden bis zu ihrem Durchschnitt in C, ziehe CA und fälle die Perpendikel CJ, CK, CL; man hat nun zu beweisen (270), dass CJ = CK = CL.

Beweis. Aus 46.

272. Zusatz 1. Die Geraden, welche die Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich in einem Punkte, und die aus diesem auf die Seiten gefällten Perpendikel sind einander gleich.

272. Zusatz 2. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich einem Rechteck aus der halben Summe der Seiten und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.

274. Lehrsatz. Nicht alle unregelmässigen, aber wohl alle regelmässigen Vielecke können in und um einen Kreis beschrieben werden.

Beweis. Der erste Theil aus 270; der zweite aus 271 und 107.

275. Lehrsatz. In allen Vierecken (AEBF Fig. 68.), welche in den Kreis beschrieben sind, sind stets je zwei Gegenwinkel (AEB und AFB; EAF und EBF) zusammen gleich zwei Rechten.

Beweis. Aus 244, Zus. 3.

276. Lehrsatz. In allen Vierecken, welche in den Kreis beschrieben sind, ist die Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten

(FA und BE, AE und FB Fig. 68.) gleich dem Rechteck aus den Diagonalen (AB, FE).

Vorbereitung. Man ziehe GE so, dass $\angle AEG = \angle FEB$; hieraus und aus 244, Zus. 1 folgt, dass $\triangle AEG \sim \triangle FEB$ und $\triangle GEB \sim \triangle EAF$.

Beweis. Aus 203, Zus. 3.

277. Lehrsatz. Wenn ein regelmässiges Vieleck in einen Kreis beschrieben ist, so

1) theilen die Seiten den Umkreis in so viele gleiche Bögen, als das Vieleck Seiten hat.

2) Die Seiten sind die Sehnen der Bögen.

3) Der Mittelpunkt des Kreises ist der Mittelpunkt des Vielecks.

4) Der Radius des Kreises ist der Radius des Vielecks.

5) Die Sehne, welche den Bogen zweier aneinander grenzenden Seiten spannt, ist die Seite eines neuen Vielecks, welches halb so viel Seiten hat als das gegebene.

Beweis. Aus 107.

277. Zusatz 1. Die Seite eines in den Kreis beschriebenen regelmässigen Vielecks ist die Sehne des Mittelpunktswinkels oder eines Centriwinkels, der $= \frac{4R}{g}$ (110, Zus. 1).

277. Zusatz 2. Die Seite des in den Kreis beschriebenen Rechtecks ist gleich dem Radius (110, Zus. 2).

278. Lehrsatz. Die Seiten und Umfänge ähnlicher regelmässigen Vielecke, welche in oder um Kreise von verschiedenen Durchmessern beschrieben sind, verhalten sich wie die Durchmesser; ihre Flächenräume hingegen stehen im zweifach hohen Verhältniss derselben.

Beweis. Aus 274, 107 und 222.

282. Lehrsatz. Wenn man zwei aneinander grenzende Seiten (FG, FE Fig. 69.) eines regelmässigen Vielecks halbirt und die Halbirungspunkte (L, M) verbindet, so ist:

1) diese Gerade die Seite eines neuen Vielecks, welches in das gegebene beschrieben und demselben ähnlich ist.

2) Die Seite des neuen Vielecks verhält sich zu der des gegebenen wie das Perpendikel (CL) des letzteren zu seinem Radius oder dem Radius des Kreises, in welchen es beschrieben ist.

3) Dasselbe Verhältniss haben die Umfänge der Vielecke zu einander.

4) Die Flächenräume stehen im zweifach hohen des genannten Verhältnisses oder

5) dieselben verhalten sich wie das Perpendikel (CR) des neuen Vielecks zum Radius (CF) des gegebenen.

Beweis. Erster Theil. Aus 116 u. 266.

Zweiter und dritter Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke LRF, CLF und CLR.

Vierter Theil. Aus 222.

Fünfter Theil. Aus der Betrachtung, dass die Vielecke sich verhalten $= \triangle CLR : \triangle CLF$ und mithin $= CR : CF$ (200).

283. Lehrsatz. Wenn man die Radien (CF, CE Fig. 70.) eines in den Kreis beschriebenen Vielecks (FEDBAF) bis zum Durchschnitt (in N und G) mit der Tangente (NG) verlängert, welche an den Punkt (J) gezogen ist, in welchem das verlängerte Perpendikel (CJ) den Umkreis schneidet, so ist das so erhaltene Stück (NG) der Tangente die Seite eines regelmässigen um den Kreis beschriebenen Vielecks, welches dem gegebenen ähnlich ist; oder wenn man durch die Halbirungspunkte (R und K) zweier aneinandergrenzenden Seiten (DE und FE) des in den Kreis beschriebenen Vielecks vom Mittelpunkte (C) aus gerade Linien (CRU und CKV) zieht und sie verlängert, bis sie (in U und V) die Tangente (VU) schneiden, welche an den Punkt (E) gezogen ist, in welchem die genannten Seiten (FE und DE) zusammentreffen, so ist das so erhaltene Stück (VU) der Tangente gleichfalls die Seite eines Vielecks, welches dem gegebenen ähnlich und sowohl um dieses als auch um den Kreis beschrieben ist.

Ferner verhält sich die Seite (NG oder VU) des um den Kreis beschriebenen Vielecks zu der Seite (FE oder JL) des in den Kreis beschriebenen wie der Radius (CJ) zum Perpendikel (CR) des letzteren; eben dieses Verhältniss haben die Umfänge, und in dem zweifach Hohen desselben stehen die Flächenräume; oder diese letzteren verhalten sich zu einander wie der Radius zum Perpendikel (CQ) des in das gegebene beschriebenen Vielecks.

Beweis. Erster und zweiter Theil. Aus der Congruenz der Dreiecke NCJ und VCE (46).

Dritter Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CKE und CJG und aus 223 und 222. Endlich aus der Betrachtung, dass sich die ähnlichen in und um den Kreis beschriebenen Vielecke verhalten $= \triangle CJG : \triangle CKE = JG : KQ$ (200) $= CJ : CQ$.

283. Zusatz 2. Aus dem vorstehenden Lehrsatze ersieht man, wie man ein regelmässiges Vieleck, welches einem gegebenen ähnlich ist, um einen Kreis beschreiben kann, und dass keine andern regelmässigen Vielecke um Vielecke oder um Kreise beschrieben werden können als diejenigen, die sich in den Kreis beschreiben lassen.

283. Zusatz 3. Sobald die Seite eines in den Kreis beschriebenen Vielecks gegeben ist, kennt man die Seite des ihm ähnlichen um den Kreis beschriebenen.

283. Zusatz 4. Die Seite eines um einen Kreis oder um ein Vieleck beschriebenen Vielecks verhält sich zur Seite des gegebenen, wie diese letztere zur Seite des in das gegebene beschriebenen Vielecks, d. h. $VU : JL$ (oder FE) $= JL$ (oder FE)$: RK$; daher ist die Seite des gegebenen Vielecks die mittlere Proportionale zwischen den Seiten der in und um dasselbe beschriebenen Vielecke; und ebenso verhält es sich mit den Flächenräumen: Weil

$$VU_q : FE_q = FE_q : RK_q, \text{ so ist}$$

Vieleck üb. VU : Vieleck üb. FE = Vieleck üb. FE : Vieleck üb. RK.

283. Zusatz 5. Zieht man die Linie FD, so ist $\triangle RKE \sim \triangle FDE$ und folglich: $KE : RK = FE : FD$,

$$\text{aber} \quad KE = \tfrac{1}{2}FE,$$
$$\text{folglich} \quad RK = \tfrac{1}{2}FD,$$

woraus der vorhergehende Zusatz zu folgendem wird: $VU : FE = FE : \frac{1}{2}FD$, d. h. in Worten:

Die Seite eines in den Kreis beschriebenen Vielecks ist die mittlere Proportionale zwischen der Seite eines ihm ähnlichen um den Kreis beschriebenen und der halben Seite eines in den Kreis beschriebenen, welches jedoch nur halb so viel Seiten als das gegebene Vieleck hat.

283. Zusatz 6. Aus dem vierten Zusatze geht ferner hervor, dass der Unterschied der Flächenräume des um den Kreis beschriebenen regelmässigen Vielecks und des ihm ähnlichen eingeschriebenen sich zum Flächenraum des erstern verhält wie das Quadrat der Seite des letzteren zum Quadrat des Durchmessers.

Da Vieleck über VU : Vieleck über FE = Vieleck über FE : Vieleck über RK, so ist:

Vieleck über VU — Vieleck über FE : Vieleck über VU = Vieleck über FE — Vieleck über RK : Vieleck über FE,

$\triangle RQE : \triangle RCE = QE : CE$ (200),
aber $QE : RE = RE : CE$ (209, Zus. 2),
und $RE : CE = RE : CE$,
mithin $QE : CE = RE_q : CE_q$ (155),
folglich:

Vieleck über VU — Vieleck über FE : Vieleck über VU $= RE_q : CE_q$
$= FE_q : TE_q$.

283. Zusatz 7. Daher ist der erwähnte Unterschied gleich einem ähnlichen Vieleck, um einen Kreis beschrieben, dessen Durchmesser gleich der Seite FE des gegebenen Vielecks ist.

283. Zusatz 8. Daher ist auch der genannte Unterschied gleich einem Vieleck, welches durch die Durchschnittspunkte entweder der Linien entsteht, die die Endpunkte der einander parallelen Seiten des gegebenen Vielecks verbinden, wenn dessen Seitenzahl gerade ist, oder, wenn die Zahl der Seiten ungerade ist, durch die Durchschnittspunkte der auf den Seiten in ihren Endpunkten errichteten Senkrechten (Zus. 7, 113, 115), weil in solchen Vielecken das Perpendikel halb so gross als die Seite des gegebenen Vielecks und mithin gleich dem Radius des in jene beschriebenen Kreises ist.

286. Lehrsatz. Das Perpendikel eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist gleich der Hälfte des Radius; und das Höhenperpendikel eines solchen Dreiecks ist anderthalbmal so gross als der Radius.

Beweis. Aus 207.

287. Lehrsatz. Das Quadrat von der Seite des in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist das Dreifache vom Quadrat des Radius, oder auch gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser und dem Höhenperpendikel des Dreiecks.

Beweis. (Fig. 71.) $\frac{1}{4}DF_q = DX_q = CD_q - CX_q$ (87, Zus. 2),
$CX_q = \frac{1}{4}CD_q$ (286),
folglich $\frac{1}{4}DF_q = \frac{3}{4}CD_q$
oder $DF_q = 3CD_q$
oder $DF_q = CD_r 3CD$
$= 2CD_r \frac{3}{2}CD$,
aber $\frac{3}{2}CD = AX$ (286),
folglich $DF_q = 2CD_r AX$.

287. Zusatz. Die Seite des Dreiecks ist also zum Radius incommensurabel.

288. Lehrsatz. Der Flächeninhalt des in den Kreis beschriebenen Quadrats ist doppelt so gross als der Inhalt des Quadrats vom Radius und halb so gross als der Inhalt vom Quadrat des Durchmessers oder des um den Kreis beschriebenen Quadrats.

Beweis. Aus 87.

288. Zusatz 1. Die Seite des in den Kreis beschriebenen Quadrats verhält sich zum Radius wie $\sqrt{2} : 1$.

288. Zusatz 2. Die Seite des um den Kreis beschriebenen Quadrats ist gleich dem Durchmesser.

290. Lehrsatz. Wenn man den Radius (CJ Fig. 70.) nach dem äussern und mittlern Verhältniss theilt (in Z), so ist das grössere Stück (CZ) die Seite des in den Kreis beschriebenen Zehnecks.

Vorbereitung. Man mache $JE = CZ$; ziehe CE und EZ.

Beweis. $\angle CJE = \angle CEJ = 2\angle JCE$ (97),

aber $\angle CJE + \angle CEJ + \angle JCE = 2R$ (20),

folglich $5\angle JCE = 2R$

und $\angle JCE = \frac{2R}{5} = \frac{4R}{10}$,

daher $JE = CZ$ die Seite des Zehnecks (277, Zus. 1).

290. Zusatz 1. Die Seite des Zehnecks ist also zum Radius incommensurabel.

290. Zusatz 2. Das Perpendikel (CK) des Fünfecks ist halb so gross als der Radius (oder die Seite des Sechsecks) und die Seite des Zehnecks zusammengenommen.

Beweis. Wenn $JF = JE = CZ$ die Seite des Zehnecks ist, so ist FE die Seite des Fünfecks und CK das Perpendikel.

Nun ist $CK = CZ + ZK$,

aber $JE = CZ = ZE$,

folglich $ZK = KJ$,

daher
$$\begin{aligned} CK &= CZ + \tfrac{1}{2}ZJ \\ &= CZ + \tfrac{1}{2}(CJ - CZ) \\ &= \tfrac{1}{2}CZ + \tfrac{1}{2}CJ \\ &= \frac{JE + CJ}{2}. \end{aligned}$$

290. Zusatz 3. Wenn man die Summe des Radius (oder der Sechsecksseite) und der Zehnecksseite nimmt, so ist diese ganze Linie nach dem äussern und mittlern Verhältniss getheilt, und der Radius ist das grössere Stück.

291. **Lehrsatz.** Das Quadrat der Fünfecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der Zehnecksseite und des Radius (oder der Sechsecksseite).

Vorbereitung. Ziehe CB (Fig. 70.) $\perp$ JE oder senkrecht zur Zehnecksseite, so dass also Jb = bE; ziehe aus J die Gerade JO nach dem Durchschnittspunkte O der Senkrechten bC und der Fünfecksseite FE, so ist JO = OE.

Beweis. $\angle ECO = \frac{1}{2} \angle JCE$,

$\angle JFE = \frac{1}{2} \angle JCE$ (232),

folglich $\angle ECO = \angle JFE$,

aber $\angle JFC = 2 \angle FCJ$ (weil FJ die Zehnecksseite ist) $= \angle FCE$,

mithin $\angle FCE - \angle ECO = \angle JFC - \angle JFE$

oder $\angle OCF = \angle CFO$,

daher $OC = FO$

und $\triangle FCO \sim \triangle FCE$,

also $FE : FC = FC : FO$.

Ebenso ist $\triangle EJO \sim \triangle FJE$ und daher $FE : JE = JE : OE$,

folglich $JE_q + FC_q = OE_r FE + FO_r FE$
$= FE_q$.

291. **Zusatz 1.** Aus 291 und 290 Zus. 1 geht hervor, dass die Seite des Fünfecks incommensurabel sowohl zum Radius als auch zur Zehnecksseite ist.

291. **Zusatz 2.** Das Quadrat der Fünfecksseite (FE) und das Quadrat der Sehne (FB), welche die Bögen zweier aneinandergrenzenden Fünfecksseiten spannt, sind zusammengenommen so gross als das fünffache Quadrat des Radius.

Beweis. $FB_q + FJ_q = BJ_q = 4CJ_q$,

$FE_q = FJ_q + CJ_q$,

also $FB_q + FE_q + FJ_q = 4CJ_q + FJ_q + CJ_q$

oder $FB_q + FE_q = 5CJ_q$.

292. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines in den Kreis beschriebenen Fünfecks ist gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich $\frac{5}{6}$ der Sehne, welche die Bögen zweier aneinandergrenzenden Fünfecksseiten spannt, und dessen Höhe anderthalbmal so gross als der Radius ist.

Beweis. (Fig. 70.) Da $\triangle FEC$ gleichschenkelig, so ist

$\triangle FEC = \frac{1}{2} CE_r FS = \frac{3}{2} CE_r \frac{1}{3} FS = \frac{3}{2} CE_r \frac{1}{6} DF$,

folglich $5 \triangle FEC =$ Fünfeck $FEDBAF = \frac{3}{2} CE_r \frac{5}{6} DF$.

293. Lehrsatz. Wenn man die Bögen, welche die Seiten eines in den Kreis beschriebenen regelmässigen Vielecks spannen, halbirt, so:

1) bilden die Sehnen der halben Bögen ein neues regelmässiges Vieleck von doppelt so viel Seiten, als das frühere hat.

2) Jede Seite (JE Fig. 70.) des neuen oder spätern Vielecks steht zur halben Seite (KE) des ersteren oder früheren im zweifach niederen Verhältniss des Durchmessers (BJ) zu dem Stück (BK) desselben, welches durch die Seite des früheren Vielecks abgeschnitten wird.

3) In eben demselben Verhältniss stehen die Umfänge beider Vielecke zu einander.

4) Der Flächeninhalt des spätern Vielecks verhält sich zu dem des früheren, wie der Radius (CJ) zu dem Perpendikel (CK) des früheren; oder

5) wie die Seite (FE) des früheren Vielecks zu der aus ihrem Endpunkte (F) auf den Radius (CE) gefällten Senkrechten; oder

6) das spätere Vieleck steht zu dem früheren im zweifach niederen Verhältniss des Durchmessers (TE) zu dem Stück TS desselben.

Beweis. Erster Theil ist von selbst einleuchtend.

Zweiter und dritter Theil. Man halbire die Seite FE in K und ziehe durch K den auf FE senkrecht stehenden Durchmesser JKB. Der Beweis ergibt sich aus 246 und der Aehnlichkeit der Dreiecke JKE und JBE (196).

Vierter Theil. Aus der Betrachtung, dass wenn g die Zahl der Seiten des früheren Vielecks ausdrückt, das Vieleck gleich $2g \times \triangle KCE$ und das spätere Vieleck $= 2g \times \triangle JCE$ ist; dass sich diese beiden Dreiecke aber zu einander verhalten wie $CK : CJ$, daher auch das spätere Vieleck zum früheren wie $CJ : CK$.

Fünfter und sechster Theil. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FSE und CEK hat man

$CK : CE$ oder $CJ = FS : EF = \sqrt{TS} : \sqrt{TE}$ (209, Zus. 3),

also das spätere Vieleck zum früheren $= FE : FS = \sqrt{TE} : \sqrt{TS}$.

293. Zusatz 1. Der Umfang eines in den Kreis beschriebenen regelmässigen Vielecks ist kleiner als der Umfang eben eines solchen von doppelter Seitenzahl.

293. Zusatz 2. Der Inhalt eines in den Kreis beschrie-

benen regelmässigen Vielecks ist kleiner als der Inhalt eben eines solchen von doppelter Seitenzahl.

293. Zusatz 3. Da sich verhält: das Vieleck über FE : Vieleck über JE = CK : CJ und

$$CK : CJ = CK : CE = FT : TE,$$

so verhält sich ein in den Kreis beschriebenes regelmässiges Vieleck zu eben einem solchen von doppelter Seitenzahl, wie die Sehne vom Supplementarbogen des zur Seite des erstgenannten Vielecks gehörigen Bogens zum Durchmesser des Kreises.

293. Zusatz 4. Aus dem dritten Zusatze folgt wiederum, dass, wenn man ein in den Kreis beschriebenes regelmässiges Vieleck hat und durch Halbirung der zu den Seiten gehörigen Bögen ein zweites Vieleck von doppelter Seitenzahl in den Kreis beschreibt, darauf ein drittes, welches doppelt so viel Seiten hat als das zweite; alsdann ein viertes, welches doppelt so viel Seiten hat als das dritte u. s. f., das erste Vieleck sich zum letzten (n^{ten}) verhält, wie das Produkt aus allen Sehnen der Supplementarbögen zur $(n-1)$ten Potenz des Durchmessers.

293. Zusatz 5. Durch den letzten Theil des Lehrsatzes kann man den Inhalt eines Vielecks vermittelst eines andern, welches halb so viel Seiten hat, d. h. den Inhalt eines späteren Vielecks vermittelst eines früheren berechnen. Die Zahl, wodurch der Inhalt des früheren Vielecks ausgedrückt wird, ist: $2g \times \triangle CKE = g \times CK \times KE$; daher verhält sich:

das spätere Vieleck: $g \times CK \times KE = CJ : CK$,

mithin das spätere Vieleck $= \dfrac{g \times CK \times KE \times CJ}{CK} =$

$$= \frac{g \times FE \times CJ}{2} = \frac{g \times FE}{2},$$

wenn $CJ = 1$ gesetzt wird. Hieraus ergibt sich der folgende Lehrsatz Ludolf's van Eulen:

„Wenn man die Seite eines in einen Kreis, dessen Radius „gleich der Einheit gesetzt wird, beschriebenen Vielecks mit der „halben Zahl der Seiten multiplicirt, so erhält man den Inhalt eines „in denselben Kreis beschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl."

293. Zusatz 6. Da das spätere Vieleck $= \dfrac{g \times FE \times CJ}{2}$ ist, so ist ein Vieleck gleich einem Dreiecke, dessen Höhe der

Radius und dessen Grundlinie gleich dem Umfange eines Vielecks von halb so grosser Seitenzahl als das gegebene ist.

293. Zusatz 7. Daher verhält sich der Inhalt des Sechsecks zu dem des Dreiecks wie CA : CX (Fig. 51.) = 2 : 1 (286); d. h. das Sechseck ist doppelt so gross als das Dreieck.

293. Zusatz 8. Daher ist der Inhalt des Zwölfecks gleich dem halben Produkt aus dem Sechsfachen der Sechsecksseite und dem Radius; oder gleich dem dreifachen Quadrat des Radius; oder auch gleich dem Quadrat der Seite des gleichseitigen Dreiecks.

293. Zusatz 9. Hieraus und aus 288 folgt hinwieder, dass der Inhalt des eingeschriebenen Zwölfecks sich zu dem des in den Kreis beschriebenen Quadrats verhält wie 3 : 2 und zum Quadrat des Durchmessers wie 3 : 4.

296. Lehrsatz. Wenn man vom Mittelpunkte (C Fig. 70.) eines Kreises Senkrechte (CJ, CL) auf zwei aneinandergrenzende Seiten (NG, Ga) eines um denselben beschriebenen regelmässigen Vielecks (NGa) fällt und nach der Ecke (G), in welcher die genannten Seiten zusammentreffen, einen Radius (CEG) zieht, alsdann die Winkel (JCG, GCL), welche die Senkrechten mit diesem Radius bilden, durch die bis zum Durchschnitt in X und Y mit den Seiten des Vielecks verlängerten Geraden CX, CY halbirt, so findet Folgendes Statt:

1) Die Gerade XY, welche die genannten Durchschnittspunkte verbindet, ist die Seite eines neuen um den Kreis beschriebenen Vielecks, welches doppelt so viel Seiten hat, als das gegebene.

2) Die Seite XY des neuen Vielecks verhält sich zu der des gegebenen wie der Radius (CE) des gegebenen Kreises zur Summe der Radien (CE und CG) eben dieses und des um das gegebene Vieleck beschriebenen Kreises.

3) Die Umfänge der beiden Vielecke verhalten sich zu einander wie der Durchmesser des gegebenen Kreises zur Summe der Radien beider Kreise, des gegebenen nämlich und des um das gegebene Vieleck beschriebenen, oder des innern und äussern Kreises des gegebenen Vielecks.

4) In eben diesem Verhältnisse stehen die Flächenräume der beiden Vielecke.

Beweis. Erster Theil. Aus der Congruenz der Dreiecke CJX und CYL folgt CX = CY, JX = LY und daher XG = GY,

folglich $CE \perp XY$, und da $CE = CJ$, so berührt XY den Kreis in E, und es ist $JX = XE$, ebenso $EY = LY$.

Zweiter Theil. Aus 206 und 153.

Dritter Theil. Aus der Betrachtung, dass wenn der Umfang des gegebenen Vielecks gleich ist $g \times JG$, der des neuen $2g \times JX$ oder XE ist.

Vierter Theil. Aus der Betrachtung, dass die Flächenräume im zusammengesetzten Verhältniss ihrer Umfänge und Perpendikel stehen (224) und dass hier die Perpendikel beider Vielecke dieselben sind, nämlich der Radius des gegebenen oder innern Kreises.

296. Zusatz 1. Die Seite eines um den Kreis beschriebenen Vielecks ist kleiner als die eben eines solchen, jedoch von halb so grosser Seitenzahl als des ersteren.

296. Zusatz 2. Der Umfang und der Inhalt eines um den Kreis beschriebenen Vielecks sind gleichfalls kleiner als der Umfang und der Inhalt eines eben solchen Vielecks von halb so grosser Seitenzahl.

296. Zusatz 3. Die Seite eines um den Kreis beschriebenen Vielecks verhält sich zu der Seite eines in den Kreis beschriebenen von halb so grosser Seitenzahl wie der Radius zur Summe des Radius und des Perpendikels vom letztgenannten Vieleck.

296. Zusatz 4. Daher verhält sich die Seite des um den Kreis beschriebenen Sechsecks zur Seite des eingeschriebenen Dreiecks wie $R : \frac{1}{2}R + R$ (286) $= 2 : 3$.

Aus dem siebenten Buche,

handelnd

Vom Umfange und Inhalte des Kreises.

305. Erklärung. Wenn eine Grösse A durch stetes Wachsen oder Sichvermindern einer andern Grösse L näher und näher kommt, ohne jedoch dieselbe je erreichen oder übertreffen zu können, so wird die letztere Grösse L die Grenze der ersteren A genannt, und zwar die Wachsthumsgrenze, wenn die Grösse A der Grenze L durch Zunehmen, die Verminderungsgrenze aber, wenn die Grösse A der Grenze L durch Abnehmen immer näher kommt.

305. Zusatz 1. Da die Grösse A durch beständiges Zu- oder Abnehmen ihrer Grenze, der Grösse L, stets näher und näher kommt, so folgt hieraus, dass sie so lange vermehrt oder vermindert werden kann, dass sie von ihrer Grenze um weniger unterschieden ist, als irgend eine gegebene Grösse, wie klein diese auch sein möge, beträgt.

Beispiele.

1) Die Tangente AB (Fig. 61.) ist die Verminderungsgrenze für alle Schneidende AF, AD u. s. w., die von demselben Punkte A nach dem hohlen Theile des Umkreises gezogen werden können; sie ist die Wachsthumsgrenze für alle Geraden AE, AK u. s. w., welche nur bis an den ausgebogenen Theil des Umkreises reichen.

2) Der Bruch $\frac{1}{3}$ ist die Wachsthumsgrenze von dem beliebig weit fortgeführten Decimalbruch 0,333333 . . .

3) Die Zahl 1 ist die Wachsthumsgrenze der beliebig weit fortgeführten geometrischen Reihe: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$

306. Erklärung. Wenn das Verhältniss zwischen zwei Grössen dem beständigen Verhältniss zwischen zwei andern Grössen durch Zu- oder Abnehmen mehr und mehr nahe kommt, so wird das letztere Verhältniss die Wachsthums- oder Verminderungsgrenze des ersteren genannt.

Beispiele.

1) Das Verhältniss $\sqrt{2} : 1$ ist die Wachsthumsgrenze für alle Zahlen, durch welche das Verhältniss zwischen der Diagonale und der Seite eines Quadrats ausgedrückt werden kann.

2) Das Verhältniss $2 : \sqrt{3}$ ist die Verminderungsgrenze für die Zahlen, durch welche man das Verhältniss zwischen der Seite und dem Höhenperpendikel eines gleichseitigen Dreiecks ausdrücken kann.

3) Das Verhältniss $\sqrt{3} : 1$ ist die Wachsthumsgrenze des Verhältnisses der Seite des in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Dreiecks zum Radius, wenn man das Verhältniss in Zahlen ausdrückt.

308.* Lehrsatz. Sind zwei Grössen gegeben, von denen die eine (L) beständig, die andere (A) veränderlich ist, jedoch durch Vermehrung oder Verminderung der erstern Grösse L mehr und mehr nahe gebracht werden kann, so dass sie von derselben um weniger, als irgend eine Grösse beträgt, unterschieden ist, so ist das Verhältniss der Gleichheit die Wachsthums- oder Verminderungsgrenze des Verhältnisses der beiden Grössen; und umgekehrt.

Beweis. Gesetzt, es wäre $L = A \pm B$, so wäre der Unterschied zwischen beiden Grössen gleich einer bestimmten Zahl, was der Voraussetzung widerspricht, dass nämlich dieser Unterschied kleiner als irgend eine gegebene Zahl sein soll.

309. **Lehrsatz.** Wenn eine und dieselbe Grösse (L) entweder die Wachsthums- oder die Verminderungsgrenze für andere Grössen (z. B. für A und B) ist, so ist das Verhältniss der Gleichheit die Grenze des Verhältnisses dieser Grössen.

Beweis. Das Verhältniss $A:L$ ist endlich das der Gleichheit, oder es ist endlich $A:L = 1:1$ (308); ebenso ist endlich $B:L = 1:1$, folglich zuletzt $A:B = 1:1$, oder das Verhältniss $A:B$ nähert sich mehr und mehr dem Verhältnisse der Gleichheit.

310. **Lehrsatz.** Sind zwei Grössen beide zugleich die Grenzen einer dritten, so ist ihr Verhältniss das der Gleichheit, d. h. sie sind gleich.

Beweis. Aus 309.

311. **Lehrsatz.** Wenn zwei Grössen A und B, beide zunehmend oder beide abnehmend, stets dasselbe Verhältniss $(a:b)$ zu einander behalten, so ist dieses Verhältniss auch das Verhältniss ihrer Grenzen (L und l).

Beweis. Es sei $A:B = a:b$. Wenn nun nicht $L:l = a:b$ wäre, so ist $L:l$ entweder $>$ oder $<$ $a:b$. Ist $L:l > a:b$, dann ist $L - x : l = a:b = A:B$. Wenn nun L und l die Wachsthumsgrenzen von A und B sind, so ist $B < l$, folglich müsste auch A stets kleiner sein als $L - x$ und könnte sich daher der Grenze L um weniger als um eine gegebene Grösse x nähern, was gegen den Begriff von Grenze streitet; es kann also nicht sein: $L:l > a:b$.

Wäre $L:l < a:b$, so ist $L:l - x = a:b = A:B$. Es ist aber $A < L$, mithin müsste auch B stets kleiner sein als $l - x$, was ebenfalls gegen den Begriff von Grenze streitet. Es kann daher auch nicht sein: $L:l < a:b$ und folglich ist $L:l = a:b$.

Wenn L und l die Verminderungsgrenzen sind, so ist das Raisonnement dasselbe.

311. **Zusatz.** Wenn zwei veränderliche Grössen (A und B) beständig dasselbe Verhältniss zu zwei unveränderlichen Grössen beibehalten $(A:B = a:b)$, welche Vermehrung oder Verminderung sie auch erfahren mögen, so stehen ihre Grenzen (L und l) in demselben Verhältniss $(a:b)$.

312. Lehrsatz. Wenn zwei Verhältnisse veränderlicher Grössen (A und B, L und M) stets gleich bleiben, welche Veränderung durch Vermehrung oder Verminderung die Grössen auch erleiden mögen (d. h. wenn beständig $A : B = L : M$), so sind die Verhältnisse ihrer Grenzen (a und b, l und m) ebenfalls gleich (d. i. $a : b = l : m$).

Beweis. Da das Verhältniss $a : b$ die Grenze des Verhältnisses $A : B$ ist, so ist es auch die des Verhältnisses $L : M$ (weil $A : B = L : M$); aber das Verhältniss $l : m$ ist die Grenze des Verhältnisses $L : M$; es sind also $a : b$ und $l : m$ die Grenzen eines und desselben Verhältnisses $L : M$, folglich $a : b = l : m$ (310).

313. Lehrsatz. Die Grenze eines aus zwei oder mehreren Verhältnissen ($A : B$ und $G : D$) zusammengesetzten Verhältnisses ist das aus den Grenzen ($a : b$ und $g : d$) der einzelnen Verhältnisse zusammengesetzte Verhältniss.

Beweis. Wenn $A : B$ als Grenze hat $a : b$ und $G : D$ als Grenze hat $g : d$, so kommt $A : B$ dem Verhältnisse $a : b$ und $G : D$ dem Verhältnisse $g : d$ näher, als irgend eine gegebene Grösse betragen kann; daher muss auch $\frac{A}{B} \times \frac{G}{D}$ näher $\frac{a}{b} \times \frac{g}{d}$ kommen, als irgend eine gegebene Grösse betragen kann, d. h. $\frac{a}{b} \times \frac{g}{d}$ muss die Grenze von $\frac{A}{B} \times \frac{G}{D}$ sein.

314. Lehrsatz. Der Umfang eines Kreises ist grösser als der irgend eines in denselben beschriebenen Vielecks und kleiner als der Umfang irgend eines um denselben beschriebenen; ebenso verhält es sich mit dem Inhalte des Kreises.

Beweis. Der erste Theil folgt aus 293, Zus. 1 und 2 und der zweite Theil aus 296, Zus. 1.

315. Lehrsatz. Der Kreisumfang ist die Grenze für alle in und um den Kreis beschriebenen Vielecke. Der Radius ist die Grenze für die Perpendikel der in den Kreis beschriebenen regelmässigen Vielecke.

Beweis. Aus 293, 296 und 305.

315. Zusatz. Aehnliche in und um den Kreis beschriebene Vielecke kommen einander desto näher, je länger die Verdoppelung der Anzahl ihrer Seiten fortgesetzt wird, und ihr letztes Verhältniss ist das der Gleichheit.

316. Lehrsatz. Die Umfänge zweier ungleichen Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Durchmesser und also auch wie ihre Halbmesser.

Beweis. Aus 278, 310, 313.

316. Zusatz 1. Alle Kreise sind ähnliche Figuren.

316. Zusatz 2. Aehnliche Bogen zweier ungleichen Kreise sind diejenigen, welche dasselbe Verhältniss zu ihren Umfängen und mithin dasselbe Verhältniss zu ihren Halbmessern haben.

316. Zusatz 3. Ebenso sind ähnliche Kreisabschnitte diejenigen, deren Bogen sich wie die Umfänge oder wie die Durchmesser der ganzen Kreise verhalten, und deren Sehnen daher auch dasselbe Verhältniss haben.

319. Lehrsatz. Der Flächenraum eines Kreises ist die Grenze für die Flächenräume aller in und um denselben beschriebenen Vielecke.

Beweis. Aus 293, 296 und 305.

320. Lehrsatz. Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem Inhalte eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Halbmesser des Kreises ist.

Beweis. Das genannte Dreieck ist die Grenze für die sowohl in als um den Kreis beschriebenen Vielecke (117, 314, 315); aber der Kreis ist auch die Grenze eben dieser Vielecke (319), woraus sich in Verbindung mit 310 die Wahrheit der Behauptung des Lehrsatzes ergibt

320. Zusatz 1. Will man den Inhalt eines Kreises durch Zahlen ausdrücken, so folgt mit Bezugnahme auf das in 203, Zus. 6 Gesagte, wenn man im Allgemeinen den Kreisumfang, den Durchmesser $= 1$ gesetzt, durch π ausdrückt und ferner den Radius eines besondern Kreises mit R, den Durchmesser mit D bezeichnet, dass der Inhalt dieses Kreises $= R^2\pi = \frac{D^2\pi}{4}$ ist.

320. Zusatz 2. Der Inhalt eines Kreises verhält sich zu dem Inhalte des eingeschriebenen Quadrates wie der halbe Umkreis zum Durchmesser (288, Zus. 1) und zu dem umschriebenen Quadrate oder dem Quadrate des Durchmessers, wie der vierte Theil des Umkreises zum Durchmesser (288, Zus. 2).

321. Lehrsatz. Der Inhalt eines Kreisausschnittes ist gleich einem Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Bogen des Ausschnittes, und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist.

Beweis. Aus der Betrachtung, dass der Bogen die Grenze für die Summe der Grundlinien der in den Kreisausschnitt beschriebenen gleichschenkeligen Dreiecke und der Radius die Grenze für die Höhen derselben ist.

322. **Lehrsatz.** Ungleiche Kreise haben dasselbe Verhältniss zu einander wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Beweis. Aus 316 und 320.

322. **Zusatz 1.** Man kennt stets das Verhältniss zweier Kreise zu einander, wenn ihre Durchmesser bekannt sind, und man kann daher Kreise beschreiben, welche ein bestimmtes Verhältniss zu einander haben.

322. **Zusatz 2.** Wenn man über der Hypotenuse und über den beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks als Durchmessern Kreise beschreibt, so ist die Summe der beiden über den Katheten beschriebenen Kreise gleich dem über der Hypotenuse beschriebenen Kreise. Man kann daher einen Kreis beschreiben, welcher gleich einer beliebig gegebenen Zahl von Kreisen ist.

323. **Lehrsatz.** Wenn man über der Hypotenuse und den beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks Halbkreise beschreibt, und zwar nach derselben Seite hin, so dass also die beiden letzteren den ersteren schneiden, so sind die beiden Monde F und G (Fig. 72.) zusammen so gross als das Dreieck.

Beweis. Aus 322, Zus. 2.

